

Preguntas físicas donde aparecen tensegridades & rigidez

DISCLAIMER

- es solo una selección *
- enfoque en sistemas largos / infinitos *

(~~fluidos~~
granulares)

PREGUNTA 1 : Modelar medios granulares : - densidad
- esfuerzo estable

(Scott - Kilgour
1969)

Table 1. Densities of randomly packed spheres

	Friction†		Loose	Close packed
	μ_s	μ_k		
Steel balls	0.24	0.17	0.608	0.638
Steel (in oil)	0.24	0.17	0.611	0.638
Plexiglass (polished)	0.44	0.23	0.605	0.638
Nylon (ground)	0.63	0.23	0.575	0.629

† Measured coefficients of static and kinetic friction.

Jammed

atasadas

fracción de volumen

(cf. empaq. óptimo ≈ 0.74)

preciso: $\pi/\sqrt{3}$ Hales

explicar por qué sale 0.63 ?

J.D. Bernal 1960 : teoría estadística $\leadsto$ Parisi-Zampini 2010

Torquato - Stillinger 2010 : teoría discreta "Soft matter physics"

Instrumentos clásicos

de bolas

- 1) Considerar conjuntos de bolas como procesos estocásticos
centros = conjunto aleatorio ^{typ} "en promedio" equidistribuidos
 $\mathbb{E}(\# \text{bolas en } A) = c|A|$
 $P(\# \text{bolas en } A = k) = \dots A^k$
= ley invar. por traslaciones
 $c \rightarrow \rho_c$
 $\hookrightarrow$ (si hay 1 sola configuración, tomar sus traslaciones con prob. uniforme, para encontrar un proceso canónico)

- 2) Límite termodinámico : $N \rightarrow \infty$ / en volumen / $\rho = N/V = \text{const.}$
 $\# \text{ puntos} \rightarrow \infty$

$\rho^n g_n(x_1, \dots, x_n) =$ prob. de encontrar n puntos de la config. (aleatoria)

en las posiciones $x_1 \dots x_n$

función de correlación de n -plos de puntos

$g_2(x_1, x_2) = \tilde{g}_2(x_1 - x_2)$ por invarianza por transl.
($= \tilde{g}_2(|x_1 - x_2|)$ si hay simetría resp. rotaciones)

$P(\text{si hay pto en } x, \text{ hay en } x+r \text{ también}) = \tilde{g}_2(\vec{r})$

3) $g(r) = \text{const.} = 1$ si no hay correlación (acordar que normalizamos N, V)

↳ "escalas en más simetrías del sistema"

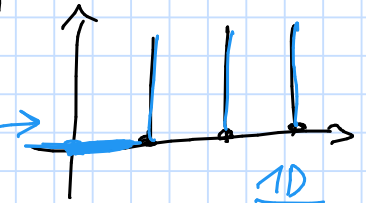
medidas por $f(x+t)=f(x) \forall t \in \mathbb{Z}^d$ $\mathcal{F}(g_2(r)=1) = S(\vec{k})$

$S(\vec{k})$ es el "factor de estructura" de las configuraciones

transf. Fourier $\vec{k} \in \mathbb{R}^d$ número ≥ 0

frecuencias o "periodicidades"

• Cristales: $S(\vec{k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}_i} \right|^2$



• Configur. casuales (proceso de Poisson): $\lim_{|k| \rightarrow 0} S(k) > 0$

• Configur. hiperuniformes: $\lim_{|k| \rightarrow 0} S(k) = 0$

$e^{-i\vec{x} \cdot \vec{k}} g_2(x) - 1$
 $\cos(x \cdot \vec{k}) + i \sin(x \cdot \vec{k})$

↳ cond. "equivalente": $N(R) = \#(\text{puntos en } B_R(0))$

$\alpha S(k) \sim 1/k^\alpha$

Var. aleatoria $\text{Var}(N(R)) \sim \begin{cases} R^{d-1} & \alpha > 1 \\ R^{d-1} \ln R & \alpha = 1 \\ R^{d-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}$

$\sqrt{E((N - E(N))^2)} \sim R^{d-\alpha}$ hiperunif

"Demostrado" experimentalmente: • Config. de bolas "atascadas" / "isostáticas" son hiperuniformes. ($\alpha=1$)

Torquato - Stillinger (2003)

↳ "Hyperuniform configurations" [...]

• Látices perturbados al azar $\alpha=2$

Atascamiento

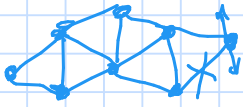
1) local: cada bola está atrapada por vecinos

(bolitas cubren 0.63 del volumen)

2) colectivo: ningún subconjunto finito se puede mover (rigidez en el sentido de tensegridades)

3) estricto: solo movimientos de dilatación global permiten flexibilidad

Configuración isotática = atascada ^{colectiv.} y con grafo de contacto minimal (borrar todos lo hace flexible)



Aporte hyperuniformidad, sirve medir ENTROPÍA

Def $\Omega_N \subset \mathbb{R}^{Nd}$ (subconjunto acotado de config.) $\xrightarrow{\Omega_N \subset \mathbb{R}^{Nd}} \Omega_N$ 1-1 sobre $\mathbb{R}^{Nd}$

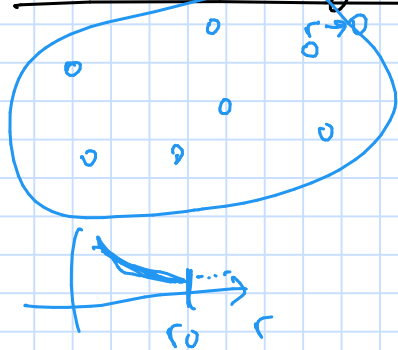
la entropía de un $\vec{x}_N \in \Omega_N$ corresp. a una config. de bolas es $\lim_{r \rightarrow 0} \log \frac{\text{Vol}_N(\vec{x}_N \text{ config. bolas en } B_r(\vec{x}_N) \cap \Omega_N)}{\text{Vol}_N(B_r(\vec{x}_N))}$

["Cuántas config. hay cerca de $\vec{x}_N$ "]

tomar límite termodinámico $N \rightarrow \infty$

→ [Acotar la entropía parece factible (matemático.) en casos sencillos, pero no creo que esté hecho!] ⚠

Caso de baja densidad : hay desarrollo en serie de



potencias → "Mayer expansion" → "cluster expansion"

Objetivo: controlar la continuación de este desarrollo

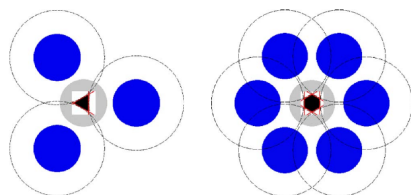
estimar densidad a la cual se instaura atascamiento

Otro objetivo controlar intervalo de atascamiento (jamming gap)

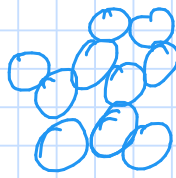
Sacando por δ el tamaño de bolas atascadas, se genera una config. donde (para δ chico)

cada bola queda atrapada por las otras

Controlar este δ .



Otras preguntas



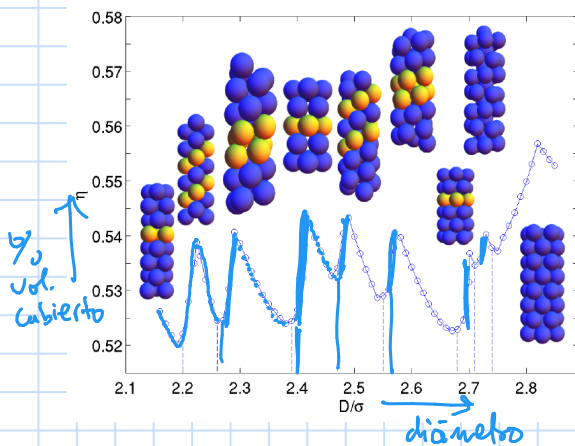
① densidad de config isostáticas ^{2D, 3D}

② densidad mín. de config atascadas (formación de funnels)

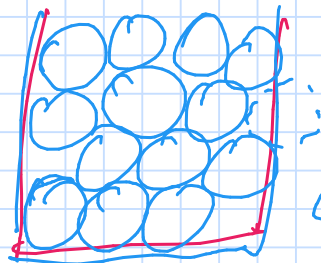
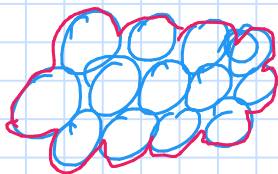
③ definir "config. aleatorias atascadas" con definición que conecte bien con aplicaciones

④ Estudio de 2-3 para otras formas y para formas de varios tamaños.

⑤ Frustración: efecto de la forma del contenedor sobre la densidad óptima



← ejemplo



cubren menos

PREGUNTA 2 : Flexibilidad en grafos periódicos y mecánica topológica

Review

Mao-Lubensky



- Terminología → aislante topológico : interior = aislante
borde = conductor



(propiedades de origen cuántica de las bandas de conducción)

↳ Repaso (Clase 3), rigidez de tensegr. con solas barras:

$$(p_i - p_j) \cdot (\bar{p}_i - \bar{p}_j) = 0$$

flexo infinitesimal: $R(p) \bar{p} = 0$

hay rigidez infinitesimal $\Leftrightarrow \text{Ker } R(p) = \{\text{flexos triviales}\}$

$$\dim = \frac{d(d+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}(R(p)) = vd - \frac{d(d+1)}{2}$$

$$\# \text{modos} = \text{Rank} + \frac{vd - \frac{d(d+1)}{2}}{2}$$

el "error" de este rango entrega "modos de vibración"

— modelo clásico de física cuántica

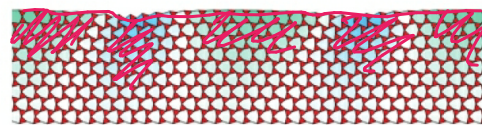
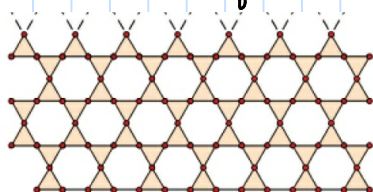
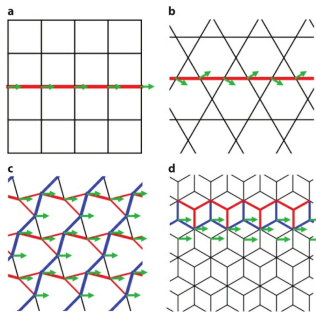
— aplicaciones en materiales / ingeniería

Considerar tensegridades periódicas con modos de oscil. locales

N vértices : $\text{Rank}(R(p)) \sim Nd - \frac{d(d+1)}{2}$

$$R_N(p) = R(p) |_{\text{conjunto de } N \text{ vert}}$$

suponer creencia $\sim Nd$ de su rango



↳ Luizel/Kagome

Mat : Sam Power
Experiment Nixon

