

Tensegridades y rigidez en problemas de optimización

Consideramos N puntos en $\mathbb{R}^d$ (N largo o ∞): $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$

Pregunta - modelo: cuál es la "mejor" configuración?

A) empaquetamiento de bolas: $B_{1/2}(x_1), B_{1/2}(x_2), \dots$ $N = \infty$

deben quedar disjuntas, y dejar "lo menos espacio vacío posible"

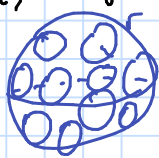
$$\min_{y \in \mathbb{R}^d} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|B_R(y) \cap (\cup B_{1/2}(x_i))|}{|B_R(y)|} \right) = \text{densidad promedio} \rightarrow \text{maximizarla}$$

B) recubrimiento por bolas: $B_1(x_1), B_1(x_2), \dots$ $N = \infty$

deben cubrir todo $\mathbb{R}^d$, y tener centros lo menos densos posible (formulación con $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\# \text{centros en } B_R(y)}{|B_R(y)|} \dots$) > 0 minimizar

SI GUSTA MÁS N FINITO, SE PUEDE REMPLAZAR

$\mathbb{R}^d$ por un espacio simétrico $X = S^d$ $\mathbb{T}_1^d = \mathbb{R}^d / \Lambda$
 (de vol. finito) $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ caso típico
 $\frac{| \cdot \cap B_R(y) |}{|B_R(y)|}$ por $\frac{| \cdot |}{|X|}$

radio bolas por r (por optimizar) $\rightarrow \begin{cases} \max r, \{x_i\} \text{ para empaquet.} \\ \min r, \{x_i\} \text{ para recubrim.} \end{cases}$
 $N=10$  $\frac{|X|}{N} \leq |B_r| \sim r^d \rightarrow \frac{|X|}{N} \sim r_N^d \rightarrow r_N \geq \frac{C^*}{N^{1/d}}$
 Probl. (radio universal) encontrar C^* que vale para todo N

C) ① Energía: $\sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^N V(|x_i - x_j|) = E_V(x_1 \dots x_N)$

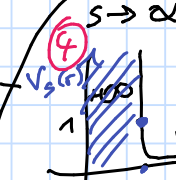
$\hookrightarrow \min_{\substack{\{x_1 \dots x_N\} \\ C \subseteq S^d}} E_V(x_1 \dots x_N)$

Ejemplos ③: $V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$

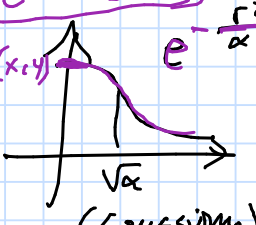
⑤ $V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$
 Van der Waals
 potencial Lennard-Jones

② $R^3 \text{ o } S^2$
 $\frac{1}{r^s} = \text{electrostatica}$

Thompson: electrones en una "orbital"

④ $s \rightarrow \infty$

 empaquetamiento

① $\frac{1}{r^s}$
 $r < 1$
 $r = 1$
 $r > 1$

$r^2 = x^2 + y^2$
 $e^{-\frac{x^2}{\alpha}} e^{-\frac{y^2}{\alpha}}$

 (Gaussiano)
 Law of Large Numbers

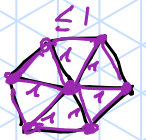
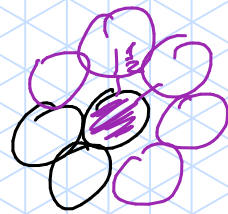
EMPAQUET. EN 2 DIMENSIONES

1954 Fejes Tóth: empaquetamiento en $\mathbb{R}^2$

* cada bola tiene ≤ 6 contactos

* hay 6 contactos $\Rightarrow$ hay hexágono regular

$\Rightarrow$ lo más denso es un lattice triangular (Heitman - Radin '81)



2003 Heppes
Kennedy

radios:

1, $\sqrt{2}-1$

Grafo de contacto

$V = \text{centros bolas}$
 $E = \{ \text{pares } \{i, j\} \}$
t.q. bolas de centro x_i, x_j se tocan

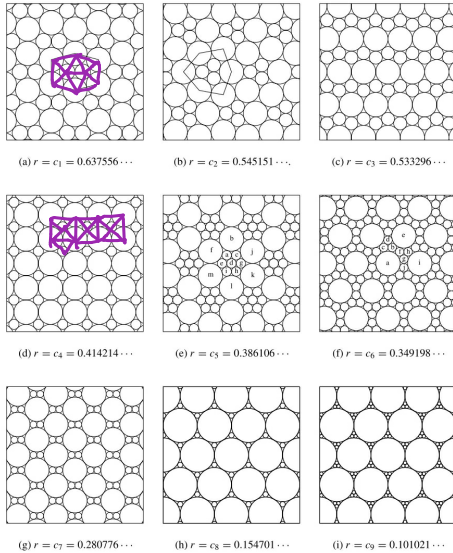


Fig. 1. A compact packing is shown for each of the nine values of r which admit compact packings.

bolas de 2 radios distintos

$\hookrightarrow$ grafo triangulado:

$\hookrightarrow$ hay solo 3 radios posibles
E.g. el grafo de contacto está triangulado



CONJECTURA: empaquet. 2 radios densidad optimal

$\Leftrightarrow$ grafo triangulado

radios 1, $\sqrt{2}-1$

(Heppes)

(Fernique $\rightarrow$)

2020

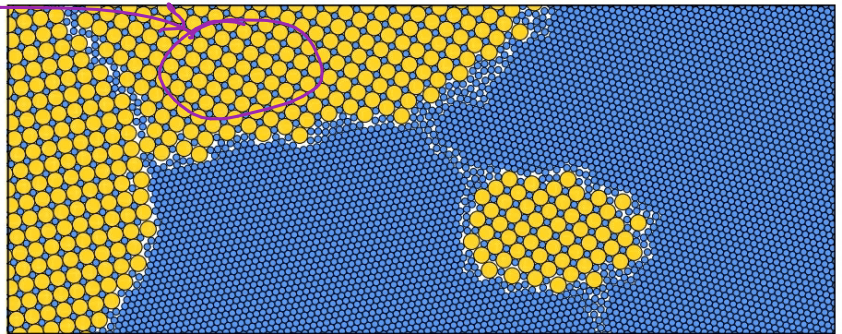


Figure 4: Typical look of a densest packing with an excess of small discs.

Teorema

3 radios $\&$ suponiendo grafo de contacto triangulado hay 164 casos

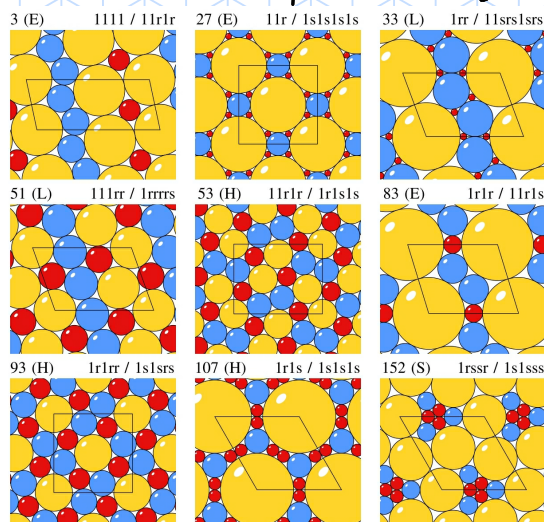


Fig. 2 Some compact packings with three sizes of discs. They are all periodic, with the parallelogram showing a fundamental domain. The top-left number refers to numbers in Appendix A and the two top-right words over $\{1, r, s\}$ codes the coronas of both a small and a medium disc (see Sect. 2). The letter in brackets refers to the type of the compact packing (see Appendix B)

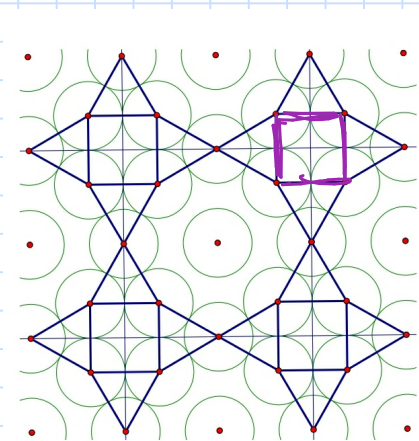
(Fernique - Hashemi - Sizova 2020)

Pregunta 1: los más densos son siempre periódicos?

Pregunta 2: los más densos son triangulados?

Connelly - Gortler - Solomonides - Yampolskaya 2018:

Empaq. de bolas iguales, periódicos, atascados.



periódicidad: consideramos configuraciones
(finitas) en $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$

atascado (en este caso) = el único
movimiento posible
en $\mathbb{T}^2$ (de la
parte conexa del
grafo de contacto)
es por traslaciones

Teorema: atascado en $\mathbb{T}^2 \Leftrightarrow$ infinitesimalm.
rígido

$\Leftrightarrow$ densidad loc.
maximal

Buscar tensegridades rígidas
con solos puntales (interiores de bolas: disjuntos)



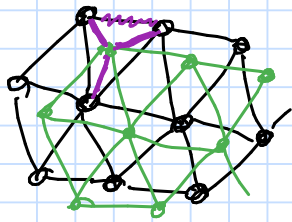
Empaquetamiento en 3D

(Conjetura de Kepler)

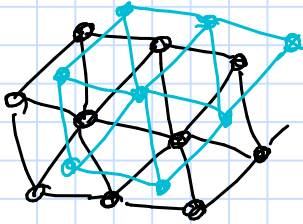
Hales:

El mejor empaq. está dado por capas 2D empiladas

Capa 1:
(grafo de contacto)



Capa 2 (versión A)

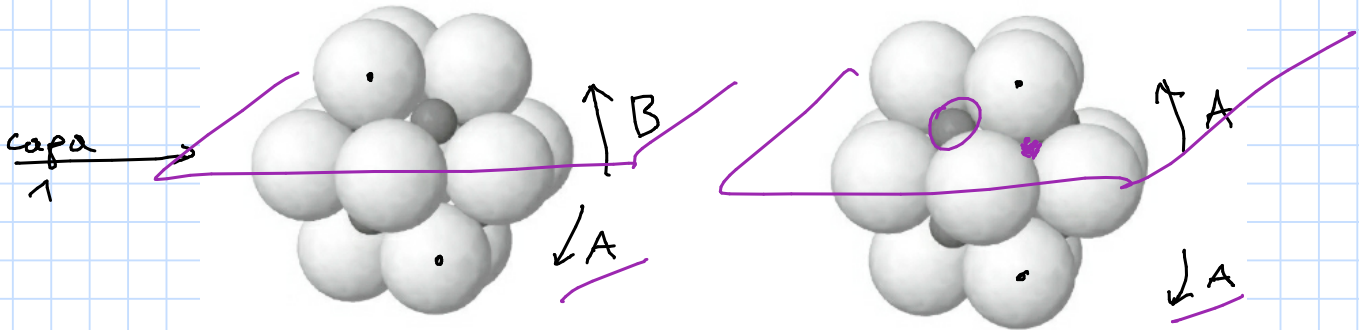


Capa 2 (versión B)

[cualquier sucesión de capas va]

Fermique 2019

Hay un solo empaquetamiento con 2 radios en $\mathbb{R}^3$
Cuyo grafo de contacto es triangulado, que extiende
cada empaquet. de Hales:



Otras dimensiones (empaquet.)

$d = 8 \rightarrow E_8$

$d = 24 \rightarrow \text{Leech}$

} Viazouska & Cohn Kumar
Miller Radchenko

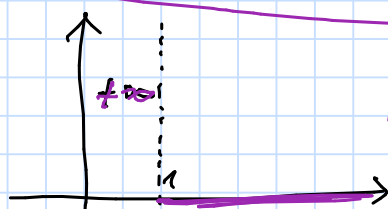
2017-2019

Energía : $d = 8, 24$ Viazovska $\Rightarrow E_8, \Lambda_{24}$

① resultado válido para $V(x-y)$
con $V(r) = e^{-\frac{r^2}{\kappa}}$ y cualquier suprapos.

$$V_\mu(r) = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{\kappa}} d\mu(\kappa), \mu \geq 0.$$

② $d=2$:



$$V(r) = \begin{cases} +\infty & r < 1 \\ -1 & r = 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

← $\max_i \# \{j : |x_i - x_j| = 1\}$

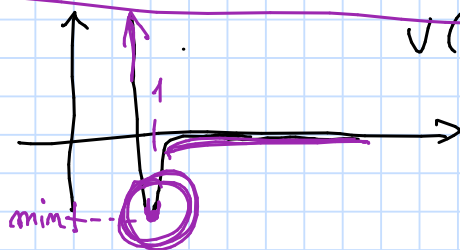
$$\min_{\{x_i\}} \sum_{i \neq j} V(|x_i - x_j|)$$

"discos pegajosos" (sticky disks)

↳ Fejes Tóth (Heilmann Radin '81)



2.1 Theil :
2006



$V(r) \rightarrow$ $\begin{cases} \text{crece mucho} & r < 1 \\ \text{mínimo en} & r = 1 \\ \text{muy chico} & r > 1 \end{cases}$

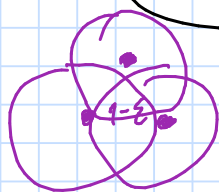
dificultades

1) evitar puntos más cercanos que $1-\varepsilon$: crecencia V

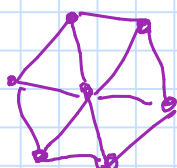
2) evitar que el comportamiento de V lejos de $r=1$ influya : V, V', V'' sumados afuera de primeros vecinos : $\ll V, V', V''$

(comport. local $\checkmark$ es dominante)
 cercía de $r=1$

puntos no muy densos



$$\begin{matrix} \nabla E \\ \nabla^2 E \end{matrix}$$

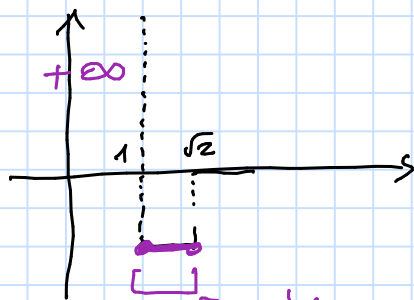


(bonus)

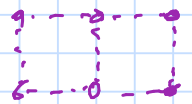
el error no empeora con la distancia : por regularidad de PDE se obtiene estimación mejor de perturbaciones de V, V', V''

③ $d=2$, otro $V(r)$ "juguete":

(Bétermim - De Luca - Petrasche 2019)



$$V(r) = \begin{cases} +\infty, & r < 1 \\ -1, & r \in [1, \sqrt{2}] \\ 0, & r > \sqrt{2} \end{cases}$$

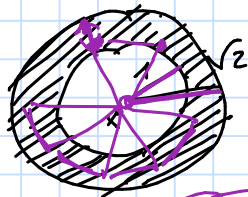


↑ cables
↑ puntos

- los puntos no quedan más cerca que a distancia 1 (sino: energía $+\infty$)
- para minimizar $\sum_{i \neq j} V(|x_i - x_j|)$ hay que maximizar $\# \{ \text{parejas con } |x_i - x_j| \in [1, \sqrt{2}] \}$

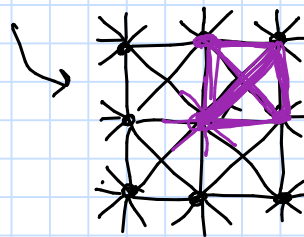
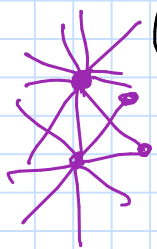
Grafo de contacto: conectar parejas a distancia $\in [1, \sqrt{2}]$

→ max # vecinos posible: es = 8



no caben ≥ 9 puntos todos a dist. ≥ 1

→ para que x y sus vecinos tengan 8 vecinos, debe pasar que unos vecinos estén conectados entre sí (discusión de varios casos)



cuadrado rígido



para preservar
lados en grafo

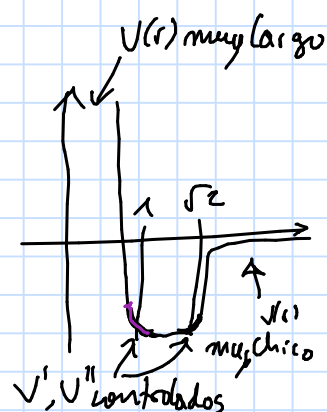
de contacto, o sea distancias en $[1, \sqrt{2}]$,

(las diagonales no se extienden

los lados no se contraen

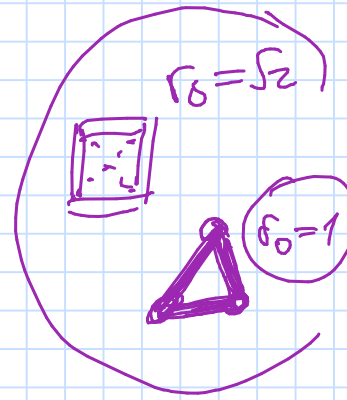
es fenseguridad rígida

Se hace también perturbación como Theil:



Más general : $\rightarrow$ tomar tensegridad rígida
con distancias $\{1, r_0\}$

y con $\begin{cases} \text{lados largos } 1 \rightarrow \text{puntales} \\ \text{lados largos } r_0 \rightarrow \text{cables} \end{cases}$



$\rightarrow$ flexar espacio

$\rightarrow$ definir $V(r) = \begin{cases} +\infty & r < 1 \\ -1 & r \in [1, r_0] \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$

$\rightarrow$ perturbación.

(No es solo en 2D)

Todo esto $\uparrow$ es por desarrollar!