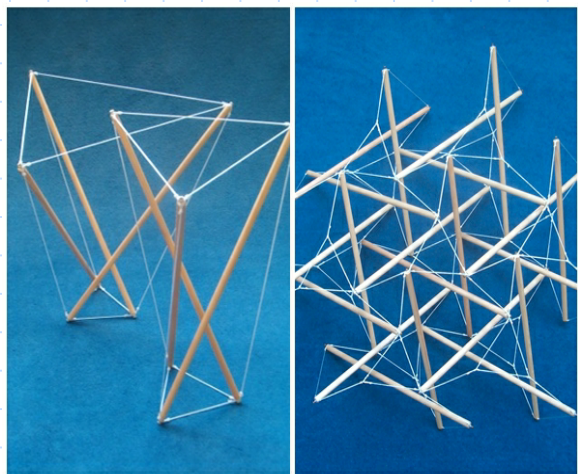


Ten se gridades

- Configuración de puntos $P = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$
- P, q congruentes si [...]

- $\forall i \neq j$ consideramos

$[P_i, P_j]$ como $\left\{ \begin{array}{l} \text{barra} \\ \text{cable} \\ \text{puntal} \end{array} \right\} \rightarrow$



junto con estas etiquetas denotadas G ,
la conf. P se transforma en tensegridad

- $G(P) \succcurlyeq G(Q) : \left\{ \begin{array}{l} \text{barras de mismo largo} \\ \text{cables más cortos en } q \text{ que en } p \\ \text{puntales más largos en } q \text{ que en } p \end{array} \right.$
 OSEA $G(P)$ ES "MÁS CERCA DE ALCANZAR LÍMITES"
 (También llamamos $G(P) \sim G(Q)$ en este caso)

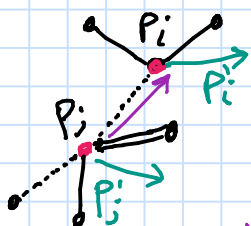
- $G(P)$ globalmente rígido : $G(Q) \sim G(P) \Leftrightarrow Q \cong P$
 ($\hookrightarrow$ teo. Cauchy entrega ejemplos) (son congruentes)

- flexo = camino $(q_t)_{t \in [-\epsilon, \epsilon]}$ con $q_0 = P, G(q_t) \sim G(P)$
de $G(P)$

$\hookrightarrow$ es flexo trivial si es generado por rot./transl.

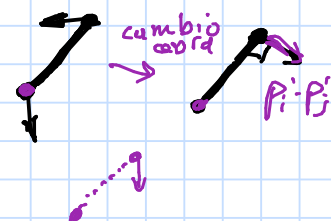
$\hookrightarrow G(P)$ es rígida si tiene solo flexos triviales

- flexo infinitesimal de $G(P)$: asignar dir. tangentes P'_i en $P_i \forall i$



tales que:

$$\begin{cases} (P_i - P_j) \cdot (P'_i - P'_j) = 0 & \text{si } P_i, P_j \text{ barra,} \\ (P_i - P_j) \cdot (P'_i - P'_j) \leq 0 & \text{si } P_i, P_j \text{ cable,} \\ (P_i - P_j) \cdot (P'_i - P'_j) \geq 0 & \text{si } P_i, P_j \text{ puntal.} \end{cases}$$



$$\frac{d}{dt} |P_i^t - P_j^t|^2$$

$$2(P_i - P_j) \cdot (P'_i - P'_j)$$

Teorema (Connelly) Sea $G(p)$ tensegridad.

$G(p)$ infinitesimalmente rígida

$\Rightarrow G(p)$ rígida

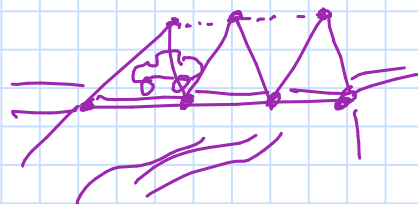
flexos infinit. solo triviales
rígida $\Leftarrow$ infinit. rígida
flexible $\Rightarrow$ infinit. flexible

$\neg A \Leftarrow \neg B$
 $A \Rightarrow B$

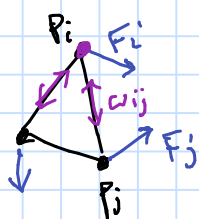
Idea: si existe flexo, $(p_t)_{t \in [t, t]}$, tomar $\frac{d}{dt} p_t \Big|_{t=0} [\dots]$
(no trivial) flexo infinitesimal no trivial

Pregunta (de Connelly): existirá algún resultado análogo en el caso continuo?

Pregunté en Math Overflow y parece que está todavía abierto



En ingeniería aparecen tensegridades en construcción $\rightarrow$ motivación para comienzo de teoría matemática
Usualmente, expresión por fuerzas/esfuerzos:



• $w_{ij} = w_{ji}$, $w_{ii} = 0$ (y son números reales)

• Informalmente: w_{ij} genera fuerza proporcional a $|p_i - p_j|$, más precisamente una fuerza de $\begin{cases} w_{ij} (p_i - p_j) & \text{en } p_i \\ w_{ij} (p_j - p_i) & \text{en } p_j \end{cases}$

Def

Cond. de equilibrio:

$$\forall p_i \in P, \quad F_i + \sum_{\substack{j \text{ conectado} \\ \text{con } i \text{ en } G}} w_{ij} (p_j - p_i) = 0$$

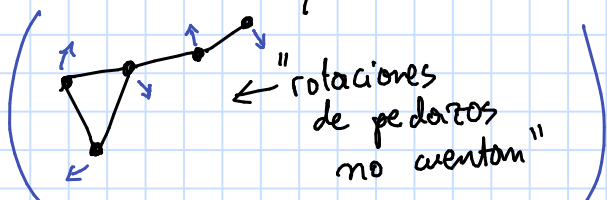
No hay bastantes conexiones en G para "balancear" cualquier fuerza.



Condición de equilibrio sobre $F = (F_1, \dots, F_m)$:

$$\sum F_i \cdot p_i = 0$$

para todo flexo infinitesimal $\{p_i\}$



"rotaciones de pedazos no eventan"

Todo esto era para solas barras.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para puntales: imponer } w_{ij} \leq 0 \\ \text{Para cables: imponer } w_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$

≤ 0 para puntales

se llama esfuerzo
admisibile

- si $\sum_i F_i \cdot p_i = 0$ para cada flexo infinitesimal **trivial**,
la $F = (F_1, \dots, F_n)$ se llama fuerza de equilibrio

Def

Teorema

Una tensegridad

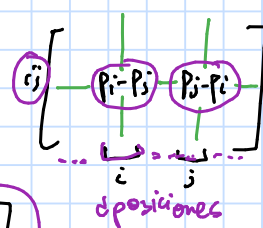
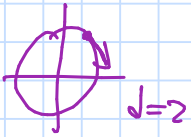
$\Leftrightarrow$
es staticamente

Matriz de rigidez de G:

$$R(p) : (\text{\# edges}) \times (\text{\# vertices})$$

si $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_v) \in \mathbb{R}^{d_v}$

en ton cas $R(p) \bar{p} = \begin{bmatrix} (p_1 - \bar{p}_1) \cdot (\bar{p}_1 - \bar{p}_1) \\ \vdots \\ (p_n - \bar{p}_n) \cdot (\bar{p}_n - \bar{p}_n) \end{bmatrix}$


$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$


demostración (caso de solo barras)

1 * flexo infinitesimo p' :

$$R(p)p' = 0$$

NOTA. Si $F = (F_1, \dots, F_n)$ fuerzas, $\tilde{R}(P) = \begin{bmatrix} R(P) \\ F_1 & F_2 & \dots & F_n \end{bmatrix}$
sumar 1 línea

* Balancear fuerzas: $\tilde{R}(p)^T \begin{bmatrix} w \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

* Sei $f(p) = (|p_i - p_j|^2)_{\{i,j\} \in G}$

$f: \mathbb{R}^{d_v} \rightarrow [0, +\infty)^c$ entrees $Df(p) = R(p)$

Not. $\Omega \in \mathbb{R}^{V \times V}$

$$\begin{cases} \Omega_{ij} = -\omega_{ij} & i \neq j \\ \Omega_{ii} = \sum_{k: i \neq k \text{ dado } G} \omega_{ik} \end{cases}$$

matriz de des. parciais

(cf. Laplace discreto)

$\mathbb{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P} = 0$: AUTO-ESTRÉS

$$\sum_{i,j \text{ both } q} w_{ij} (p_i - p_j) = 0$$

2 Equilibrio: $F \cdot \bar{p} = 0$, $\forall \bar{p}$ de la forma

$$\left(\begin{array}{l} \bar{p}_i = S p_i + x_0 \quad \text{com } S \in SO(d), x_0 \in \mathbb{R}^d \\ \text{derivada de } (R_t \in [0, \pi]) \text{ em } t = -S \\ R_0 = Id, R_t \in SO(d) \end{array} \right)$$

Estatico rigido: $\forall F \perp \{\text{triviales}\}$

$$F_i - \sum \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0 \quad \exists \omega : R(p)^t \omega = F$$

$$\text{Imm}(R(p)^t) \supseteq \text{Triv}^\perp$$

$$\text{Im}(R(p)^t)^{\perp} \subseteq \text{Triv}$$

$$\text{Ker } R(p) \subseteq \text{Triv.}$$

$$\text{Ann}(\text{Im } A) \stackrel{115}{=} \text{Ker } A$$

"balanced" $\iff \text{Ker } R(p)^t = \text{Im } R(p)^t$

Teo (Maxwell, 1864): $\text{rank}(R(p)) \leq dv - \frac{d(d+1)}{2}$ "3V-6"

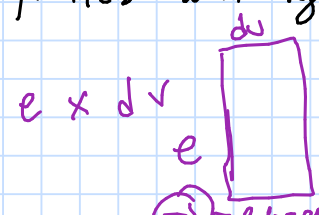
$dv - \dim \ker = \dim \text{Im}$

Vale "=" $\Leftrightarrow G(p)$ infinitesimalm. r  ido

$\frac{d(d-1)}{2} + d$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\dim \mathfrak{so}(d)} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\dim \mathbb{R}^d}$
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\dim(\text{Triv})}$

Teo (Gluck 1975)

Para G, p "gen  rico", es r  ido $\Leftrightarrow$ infinit. r  ido



$\Rightarrow$ falso en gen.
 $\Leftarrow$ siempre

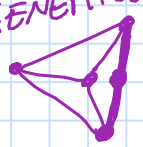
Caso de solo barras $\rightarrow$ (se extiende a tensegridades)



Teo (Roth Whiteley 1981) (Connelly 1982)

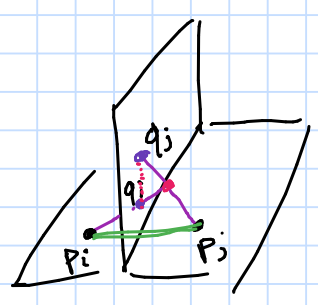
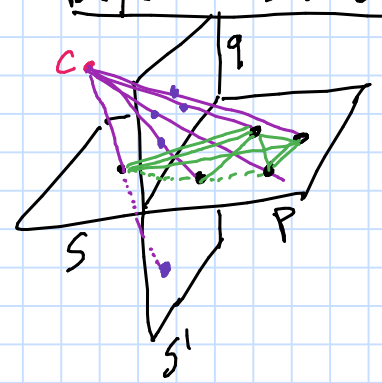
$G(p)$ tensegridad es estatic. r  ida $\Leftrightarrow$

NO GENERICO



- (1) $\exists \omega$ auto-estr  s admisible que es $\neq 0$ en cables y puntales
- (2) $G'(p) :=$ reemplazar todos por barras es r  ido

Deformabilidad:



dejar "barras = barras"
 Cambiar cables $\Leftrightarrow$ puntales
 si es que orden (c, p_i, q_i) distinto de (c, p_j, q_j)

1) $G'(q)$ estaticam. r  ido $\Leftrightarrow G(p)$ estaticam. r  ido

[Idea]: $C * G(p) :=$ "conectar C por barras a todos p_i "

Entonces $\{\text{flexos infinit. } C * G'(q)\} \cong \{\text{flexos infinit. } C * G(p)\}$

(Ver survey Connelly)

Rigidez de segundo orden (def.)

- $G(p)$ tensegridad, p' flexo infinitésimo (flexo de 1º orden)

(Def) $\hookrightarrow (p', p'')$ flexo de 2º orden si

cuando $(p_i - p_j) \cdot (p'_i - p'_j) = 0$, vale

$$|p'_i - p'_j|^2 + (p_i - p_j) \cdot (p''_i - p''_j) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \{i, j\} \text{ cable} \\ = 0 & \text{si } \{i, j\} \text{ barra} \\ \geq 0 & \text{si } \{i, j\} \text{ puntal.} \end{cases}$$

flexo p_t

$$\frac{d^2}{dt^2} \|p_{ti} - p_{tj}\|^2 \Big|_{t=0}$$

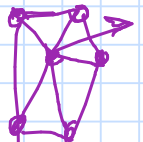
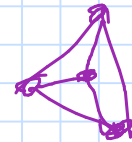
Motivación: tomar segundas derivadas de $(p_t)_{t \in [-\epsilon, \epsilon]}$, suponiendo que sea un flexo de tensegridad.

$\downarrow$
teo: $G(p)$ rígida al 2º orden $\Rightarrow$ rígida

(Teo Asim: $G(p)$ rígida $\Rightarrow \exists n$ t.q. es rígida de orden n)

Teo (Connelly inspirado por teo. Alexandrov)

Una triangulación de un poliedro convexo en $\mathbb{R}^3$ es rígida al 2º orden.



Pregunta: Cómo verificar si una tensegridad es rígida? $\rightarrow$ teoría de "matroides de rigidez"

(idea: verificar rigidez solo sobre "subgrafos mínimos")

Pregunta - realizabilidad de grafos / tensegridades:

G grafo con etiquetas "barra" / "cable" / "puntal"

$\ell : \{\text{lados } G\} \rightarrow [0, +\infty)$ asignación de largos

$\hookrightarrow (G, \ell)$ realizable en $\mathbb{R}^d$ si hay $G(p)$ tensegridad tal que $\ell(i,j) \leq |p_i - p_j|$ para cables
 $\geq$ para barras
 $\geq$ para puntales

"armar tensegridad en abstracto" $\rightarrow$ immergerla en $\mathbb{R}^d$

$\hookrightarrow$ conexión con "llenar matrices de distancias"

(matrix completion problem)

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ & & \\ & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} \bullet d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik} \\ \bullet \text{regla del paralelogramo en } \mathbb{R}^m \end{cases}$

$\hookrightarrow$ faltan entradas $\Rightarrow$ llenar

Formalmente:

$$|x_i - x_j|^2 = e_{ij}^T X^T X e_{ij} \quad \text{con } X = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}}_n \quad \text{DESCONOCIDA}$$

$$\begin{cases} e_{ij}^T Y e_{ij} = d_{ij} \\ Y = X^T X \end{cases}$$

$$e_{ij} = (0, \dots, \underset{\uparrow i}{1}, \dots, \underset{\uparrow j}{-1}, \dots, 0)$$

relajar a $Y \succeq X^T X$ ($\Rightarrow Y - X^T X$ semidef. positiva)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_d & X \\ X^T & Y \end{pmatrix} =: Z \text{ semidef. positiva}$$

problema de optimización semidefinita:

$$\text{Primal} \begin{cases} e_{ij}^T Z e_{ij} = d_{ij}^2 \\ Z \in K_{SDP} \\ Z_{ij} = d_{ij} \quad \text{si } 0 \leq i, j \leq d \end{cases}$$

$$\text{Dual} \begin{cases} \text{minimizar } I \cdot V + \sum y_{ij} d_{ij}^2 \\ \text{bajo } V + \sum y_{ij} e_{ij} e_{ij}^T \in K_{SDP} \end{cases}$$