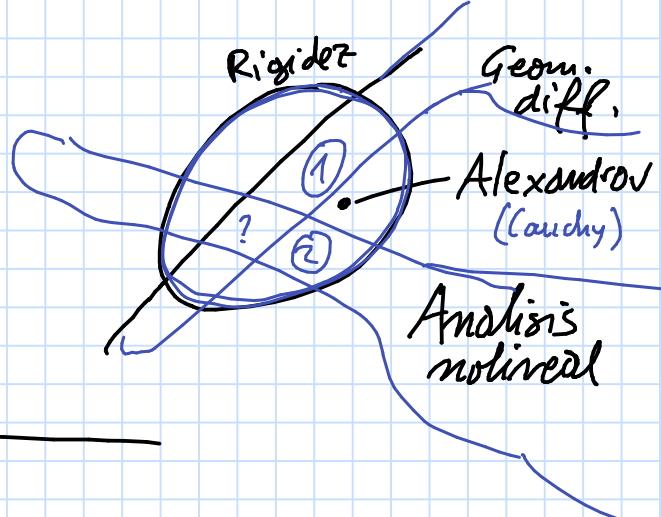


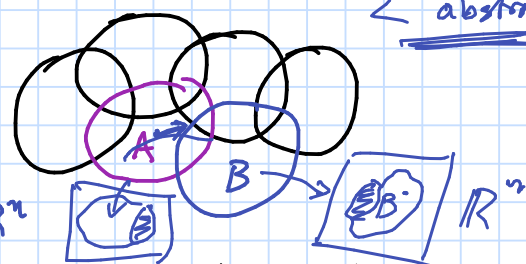
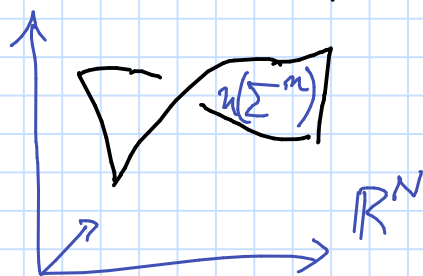
Rigidez en problemas continuos

- 1) Inmersiones isométricas
- 2) Microestructuras



$u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$ isometría
 $\uparrow$ Variedad Riemanniana (Σ, g)

Reposo (informal) : Σ variedad:



$A \xrightarrow{\varphi_A} \mathbb{R}^m, B \xrightarrow{\varphi_B} \mathbb{R}^n$

$\varphi_B \circ \varphi_A^{-1}$ diferenciable en $\varphi_A^{-1}(A \cap B)$

g : prod. escalar sobre dir. tangentes de curvas

$\hookrightarrow$ permite medir largos

$$l_g(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_g} dt$$

para $\gamma : [0, T] \rightarrow \Sigma$

u isometría :

$$l_g(\gamma) = l(u \circ \gamma) = \int_0^T \left| \frac{d}{dt}(u \circ \gamma) \right|^2 dt$$

(γ curva diff. γ)

$$\partial_i u \cdot \partial_j u = g_{ij}$$

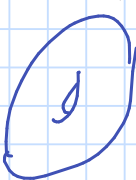
$$\sum_{\alpha=1}^N \partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha = g_{ij}$$

g_{ij} : matriz simétrica

$n \times n$



$\hookrightarrow$ dim. $\frac{n(n+1)}{2}$



$T_p \Sigma \xrightarrow{du(p)} \mathbb{R}^N$

PREGUNTA 1

Cuando $\exists$ inmersiones isométricas de (Σ^n, g) en $\mathbb{R}^N$? [Schläfli 1871]

$N \geq \frac{n(n+1)}{2}$ [Janet, Cartan, Burstin]

problema local

Weyl : pregunta global 1916

[Weyl 1916] : Cuando $\exists$ immersiones isométricas de var. Riem. de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$?

- Lewy : imm. analíticas
- Nirenberg : C^4
- Pogorelov : sup. convexos

Alexandrov (clase pasada)
 $C^{1, \frac{2}{3}+\epsilon}$ sup. + convexa en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ rígida

Teo Cohn - Vossen / Merglotz : C^2 sup. + convexa en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ rígida

(Teo. de geometría diferencial: si fijamos I y II formas fundamentales de una ipersuperficie, es rígida)

Teorema : Sea $V: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$ inmersión "corta" de Σ (osea $\ell(V \circ \gamma) \leq \ell_\Sigma(\gamma) \forall \gamma$ curva en Σ).

Para todo $\epsilon > 0$, $\exists$ $\underbrace{u: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N}_{C^{2,\alpha}}$ { inmersión isométrica tal que $\|u - V\|_{C^0} < \epsilon$

- [Wash 1954] : vale si $N \geq n+2$
- [Kuiper 1955] : vale si $N \geq n+1$

$\max_{x \in \Sigma} |u(x) - V(x)| < \epsilon$

Idea simplificada: $\xi \in$ interior de la envoltura convexa de los $\tilde{u}$

$$\tilde{u}(x) = \vec{u}(x) + \frac{a(x)}{M} \left(\sin(Mx \cdot \xi) \vec{b}(x) + \cos(Mx \cdot \xi) \vec{c}(x) \right)$$

$$\partial_i \tilde{u} = \partial_i u + a(x) \left(\cos(Mx \cdot \xi) b_i \xi_i - \sin(Mx \cdot \xi) c_i \xi_i \right) + \boxed{O\left(\frac{1}{M}\right)}$$

$$\partial_i \tilde{u} \cdot \partial_j \tilde{u} = \partial_i u \cdot \partial_j u + a^2(x) \xi_i \xi_j + O\left(\frac{1}{M}\right) \quad [|b|=|c|=1, b \cdot c=0, b \cdot \partial_i u=0, c \cdot \partial_i u=0]$$

• $v \in C^\infty$
 aproximar con serie de $\tilde{u}_k$
 $\{\otimes\}_{ij} = \xi_i \xi_j \rightarrow u \in C^{1,\alpha}$
 no se puede C^2 en gen.
 se puede $C^{1,\alpha}$
 → encontrar α optimal
 $\alpha_{opt} \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right]$
 De Lellis - Inauen - Szekelyhidi

De Lellis - Inauen : 2020
 $\alpha = \frac{1}{2}$
 para la conexión de Levi-Civita

Gromov

se dio cuenta primero que Nash habia descubierto un método muy poderoso para aproximar variedades preservando datos diferenciables [" $\partial_i u \cdot \partial_j u = g_{ij}$ " es solo 1 ejemplo!]

teoría de "integración convexa" / "homotopy principle" ($\nabla u \otimes \nabla u \neq g$)
Libro de Eliashberg - Mishachev (especialmente sobre preserv. de estructura simpléctica) geometría

Gromov "Partial differential relations"

Idea - base (repetir, más en general)

$\nabla u \in \mathcal{R}$ "imm. certa" "partial differential relation" "imm. isonética"

- si $\mathcal{R}$ es "amplio" se aproxima por $\nabla u \in \mathcal{R}'$ más pequeño en normas más débiles, usualmente.
- si queremos aproximar conservando muchas derivadas, hay una versión de Arzelà-Ascoli que no lo permite.

De Lellis - Szekelyhidi / Isett: Aplicar para eq. fluidos incompresibles (cf. Scheffer y Shnirel'man)

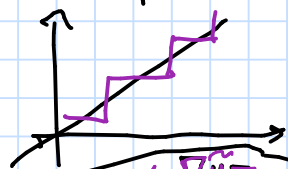
inspiración inicial:

Müller / Kirchheim [E.] TEORÍA DE MICROESTRUCTURAS

Caso de $\nabla u \in K$, K convexo

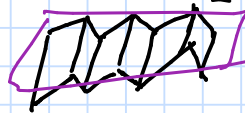
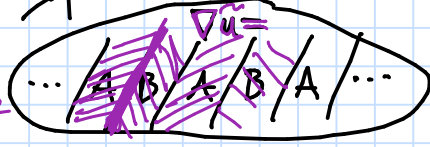
↳ aproximar por $\nabla \tilde{u} \in \partial K$ [más precisam. $\nabla \tilde{u} \in \text{ext}_K K$]

Idea 1D



Caso 2D

$\tilde{u}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



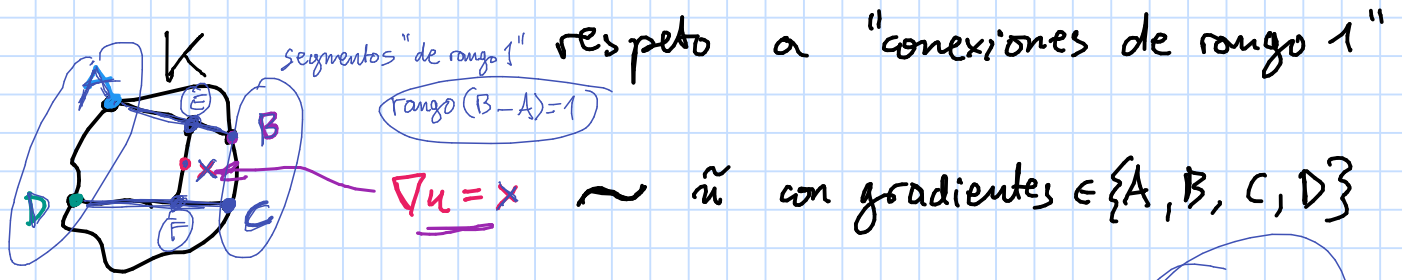
$\text{rank}(B-A) = 1$

$\tilde{u}(x) = Ax + x_0$

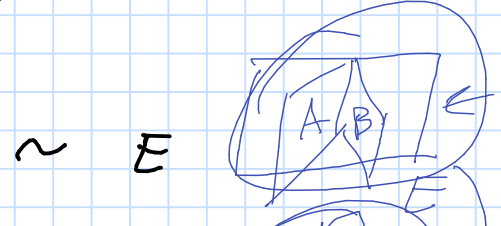
∂K

$\tilde{u}(x) = Bx + y_0$

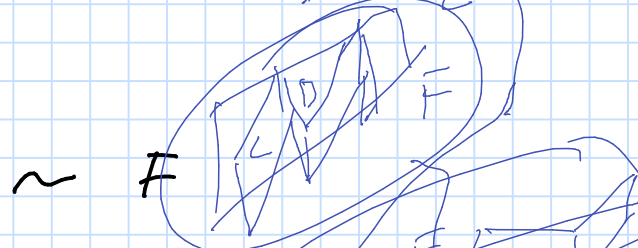
$M^{n \times n} \supseteq K \leftarrow \text{mirar extremos de } K$



1) / A / B / A / B /

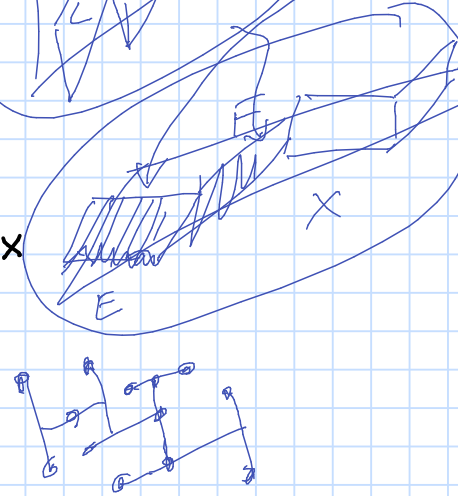


2) / C / D / C / D /

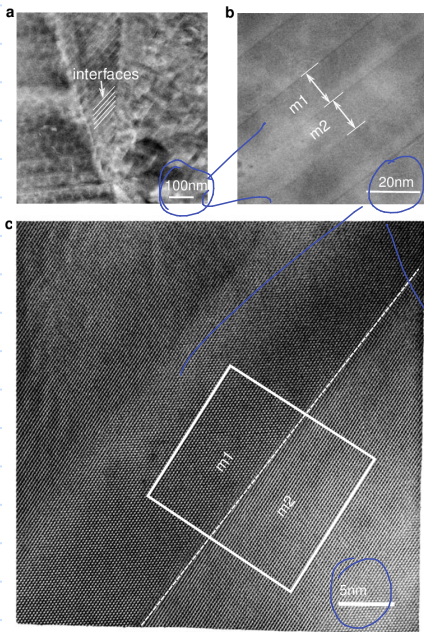


3) / E / F / E / F /

$\sim x = \nabla x$



conector $\leftarrow$ hay otro error & aproximación



Ej Microestructuras en el hierro
(martensite / austenite)

EXPLICACIÓN:



$\Lambda = \text{centros de átomos}$

$\mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\Lambda}$
deformación de grupo modelo

$\nabla u = \text{mínimo} \int F(\nabla u)$

A todas temperaturas:
F simétrica por $SO(3)$

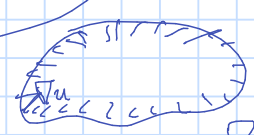


(continuación) $\min_{\substack{u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ + \text{cond. borde}}} \int F(\nabla u)$

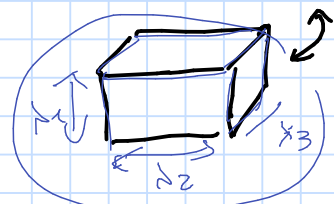
$\min F = SO(3) \cdot A$

$K = \text{Conv} (SO(3) \cdot A)$

$\partial K = SO(3) \cdot A$



$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$



$\tilde{u}_k$ sucesión minimizante $\Rightarrow \nabla \tilde{u}_k \in (\partial K)_{\epsilon_k}$ con $\epsilon_k \rightarrow 0$
entorno de tamaño ϵ_k

$\Rightarrow \tilde{u}_k$ forman microestructura para poder alcanzar cond. al borde

CALCULO DE VARIACIONES:

$I(u) = \int F(u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots)$

Clasico:

- fijar topologia t.q. F convexo

• usualmente F automaticamente coercivo

Teo. clasico

si F es convexo y coercivo entonces sucesiones minimizantes convergen

$\hookrightarrow OK$

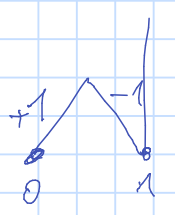
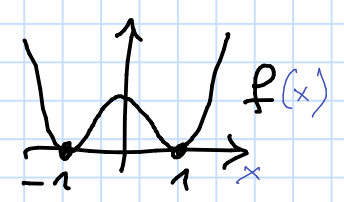
Pero en el caso del hierro: F no es convexo (pero si coerc.)

$u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$\min F$ no es convexo

Caso modelo 1D

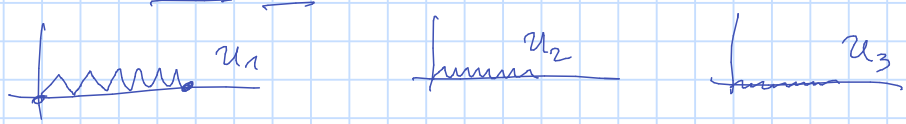
$\min_{u(0)=u(1)=0} \int_0^1 ((u')^2 - 1)^2$
 $f(u')$



$\rightarrow$ sol. $\tilde{u} =$ (pendiente ± 1)

$u' = 1$
 $u' = -1$

[B] $\min_{u(0)=u(1)=0} \int_0^1 [((u')^2 - 1)^2 + u^2]$



microestructura

Resumen:

Inmers. isométricas

$$\partial u \cdot \partial_j u \stackrel{?}{=} g_{ij}$$

Nash
Gromov

teoría de
Nash-Kuiper / integración
convexa
(h-principio)

Cohn-Vossen
Weyl
[...]

[Alexandrov
(clase 1)
Pogorelov
tenesgridados]

$\nabla u \in K \sim \nabla \tilde{u} \in \partial K$
para eq. dif. generales
(Gromov, Müller/[...]
de Lellis-Szekelihi)

Pérdida de
convexidad
para $\min \int F(\nabla u)$
[...]

