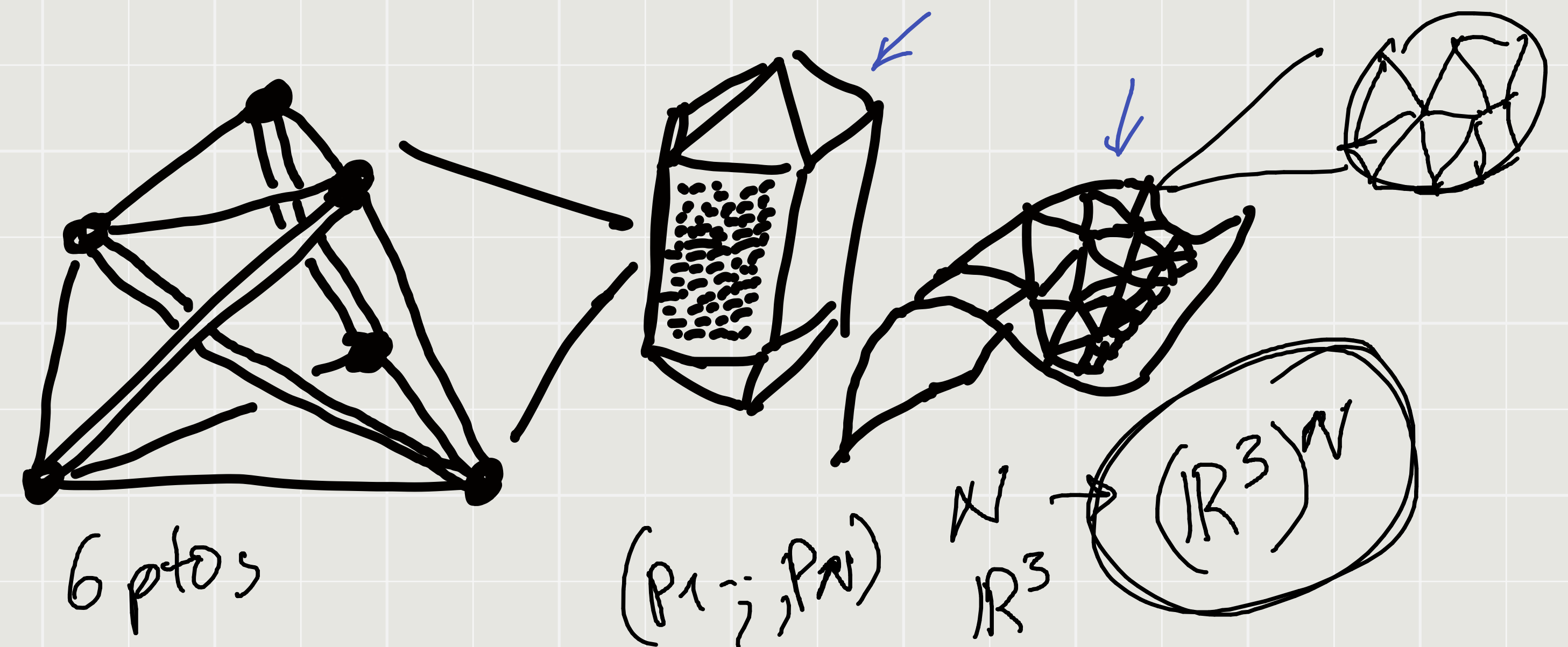


Rigidez y tensegridades

↑
Clase 1

↑
Clase 3



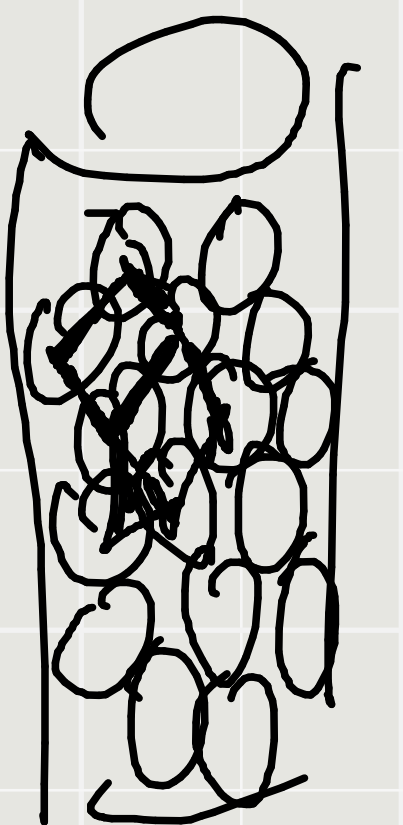
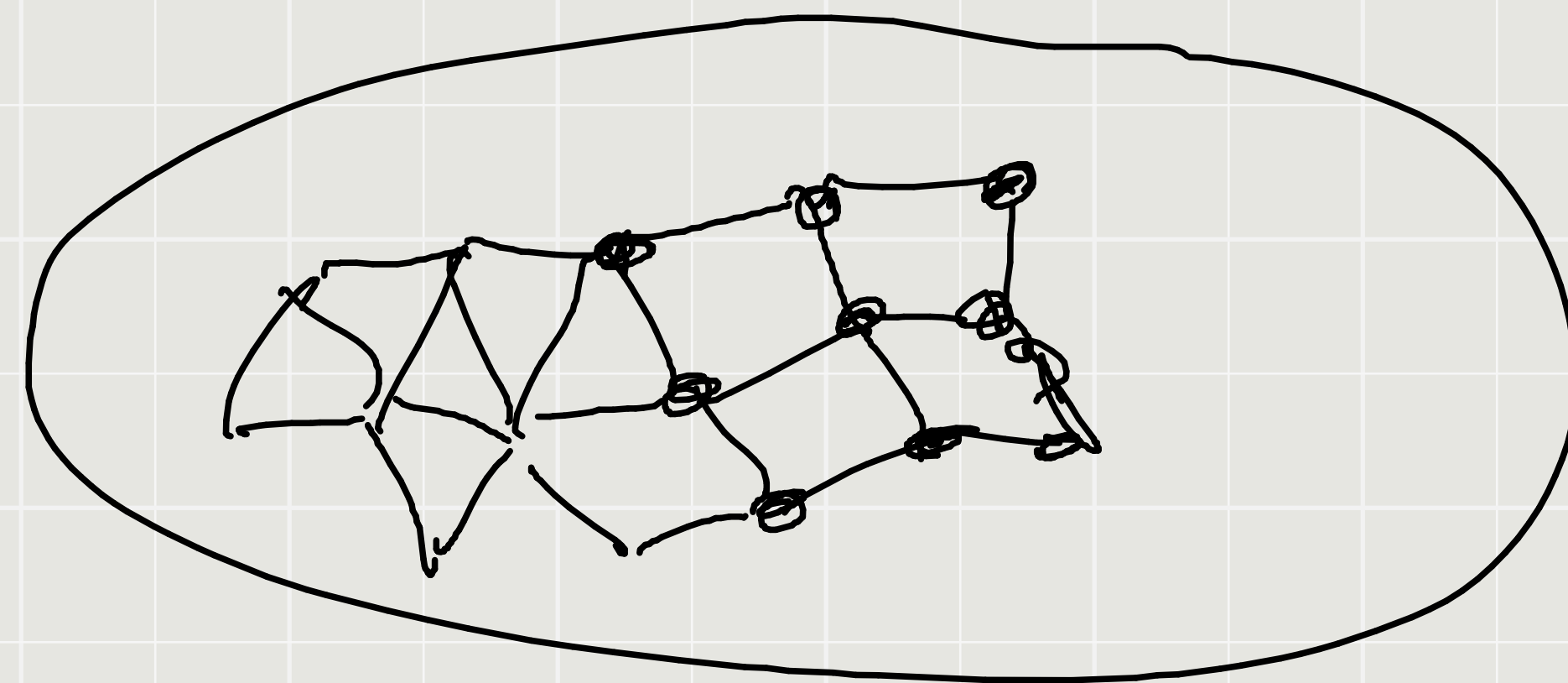
Clase 2: rigidez discreto/continua: geom. diff. & materiales

Clase 4: aplicación de tensegridades (mín. de energías)

Clase 5: rigidez para sistemas físicos & sus modelos

Demostraciones: esp. 1 & 3 (menos 4)

Survey: 2 & 5

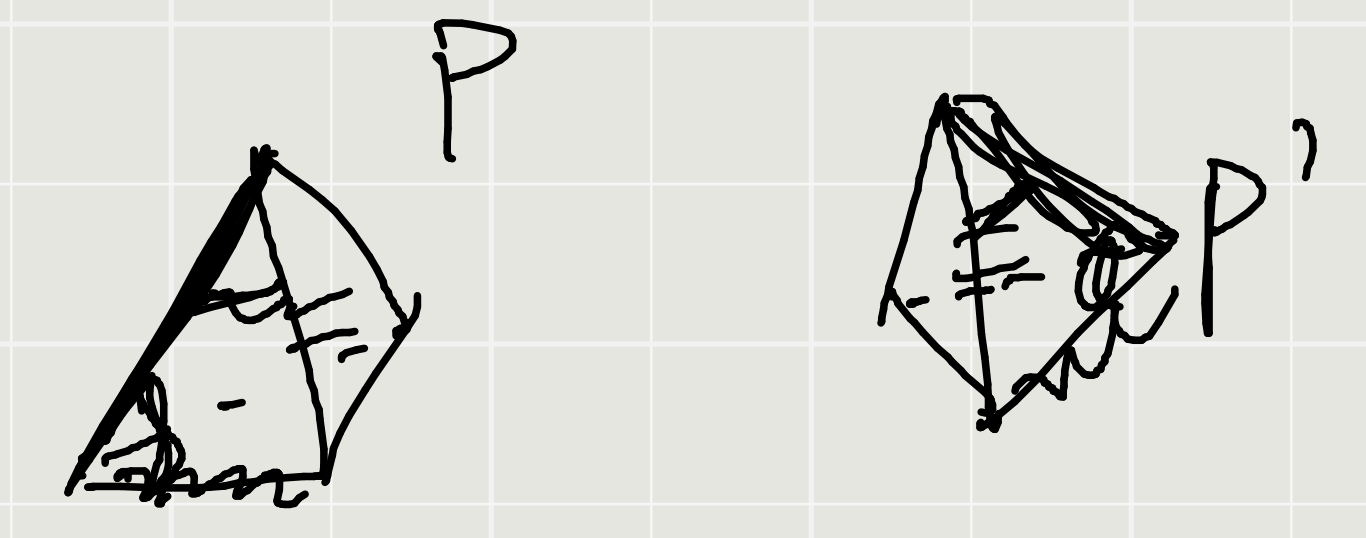
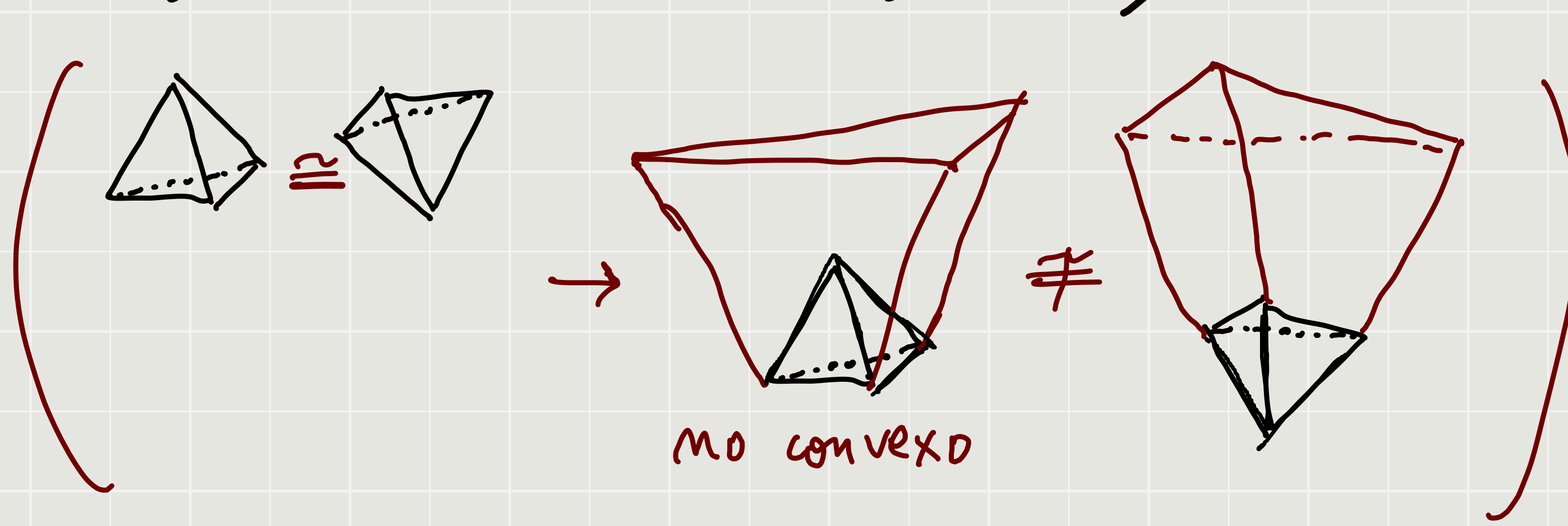


Referencias: Notas Connelly (clases 1, 3)
Libro Alexandrov (clase 1)
Notas Müller & } (clase 2)
De Lellis - Székelyhidi }
Clase 4: paper Connelly + otros
Clase 5: es survey, citare ejemplos

↑
pagina
web
(ver correo)

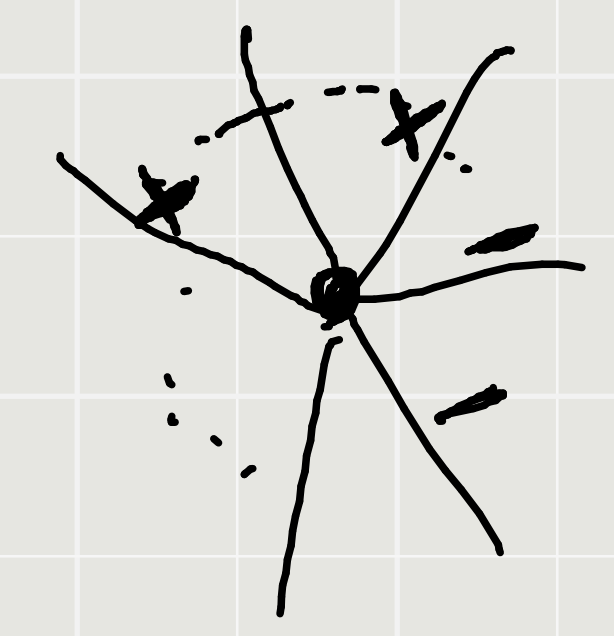
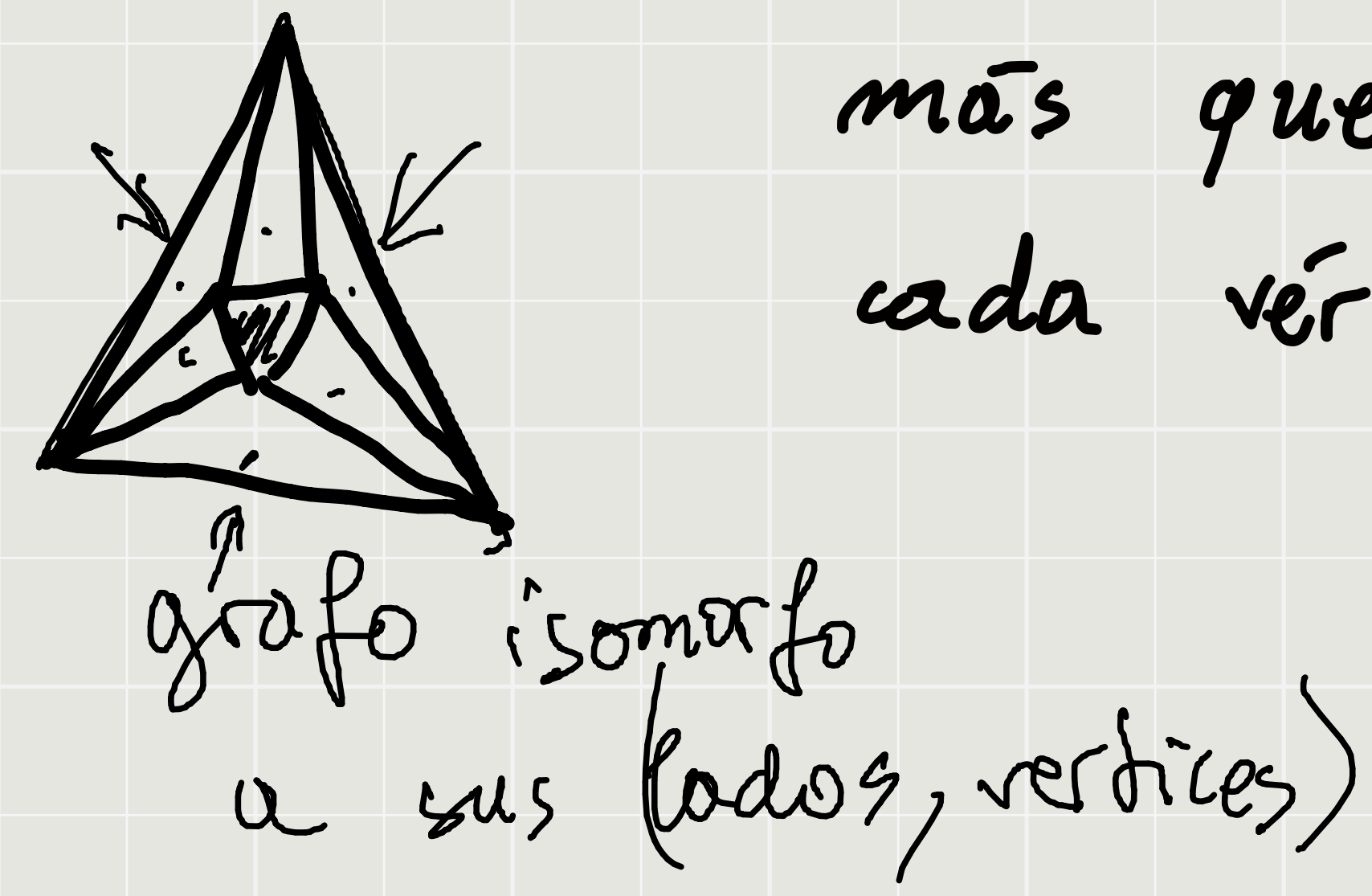
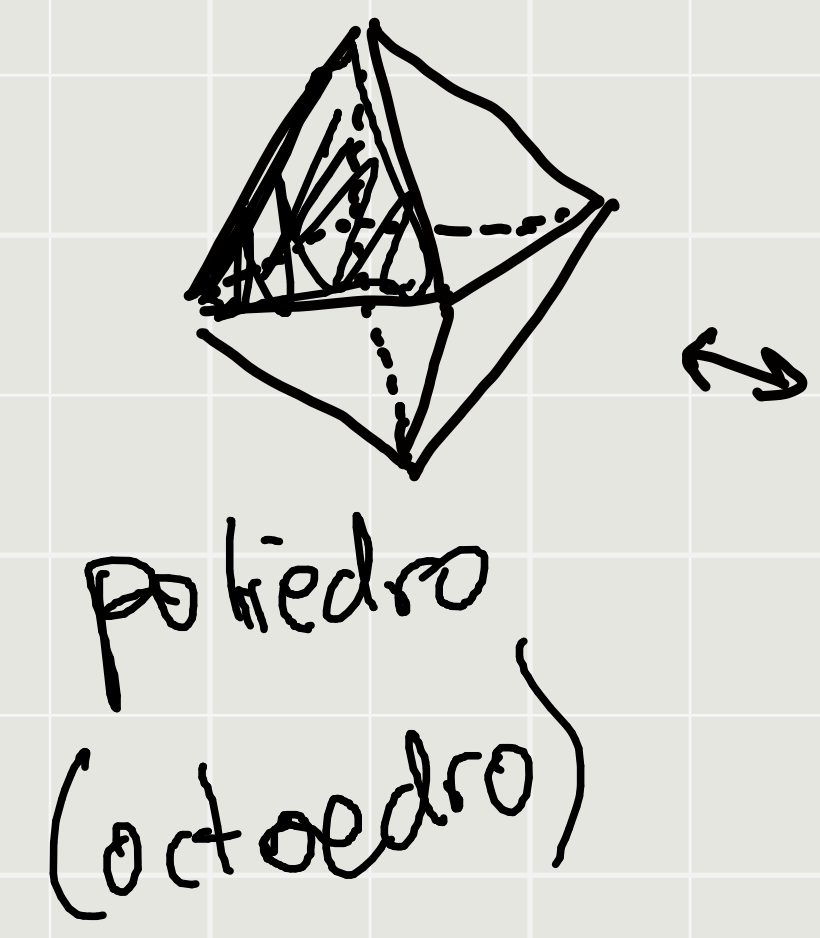
Teo. Cauchy
 con lados $l_1 \dots l_k$, $l'_1, \dots, l'_k$ de tamaños iguales, y
 ángulos de caras iguales, entonces, P congruente a P' .

P, P' poliedros
convexos en $\mathbb{R}^3$



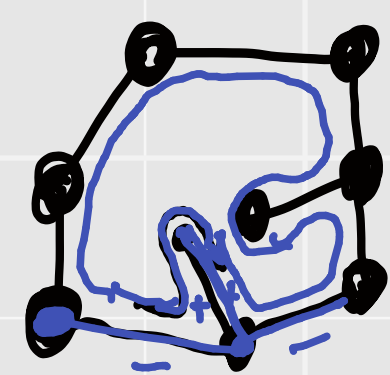
Comelly
 & Alexandrov "Rigidity"
 "Convex
 Polyhedron"

Lemma de Cauchy: Si etiquetamos unos lados de un poliedro
 con signos $+/-$, entonces no hay
 más que 4 cambios de signo en
 cada vértice.



Lem 1 Si en grafo planar las caras tienen ≥ 3 lados entonces $\#(\text{cambios signo}) \leq 4\#(\text{vértices}) - 8$. ($< 4\#(\text{vértices})$)

Dem



(sup. que todos los lados tienen $+/-$)
 contar cambios de signo en perímetro de cara

es número par!

$\Rightarrow$ lema Cauchy

$\#$ cambios de signo

$$N \leq 2F_3 + 4F_4 + 4F_5 + \dots$$

($F_k := \#$ caras con k lados)

Euler: $V - E + F = 1 + H \geq 2$
 (comp. conexas)

lados contados $2X$: $2E = \sum_n n F_n$

$F = \sum_n F_n$ (trivial)

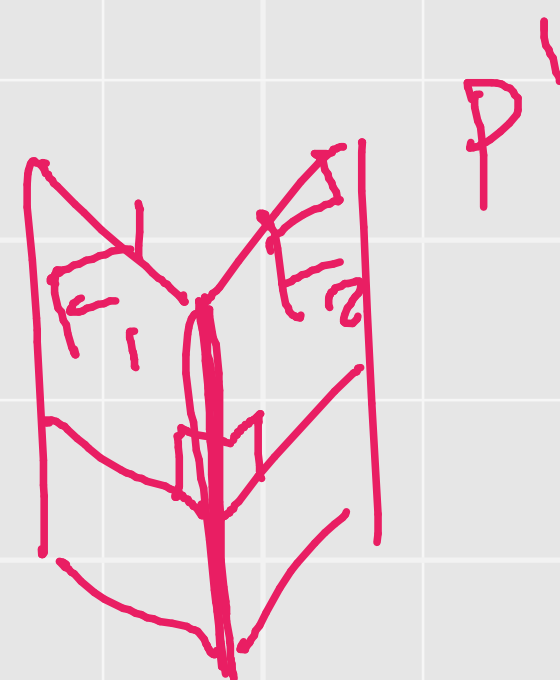
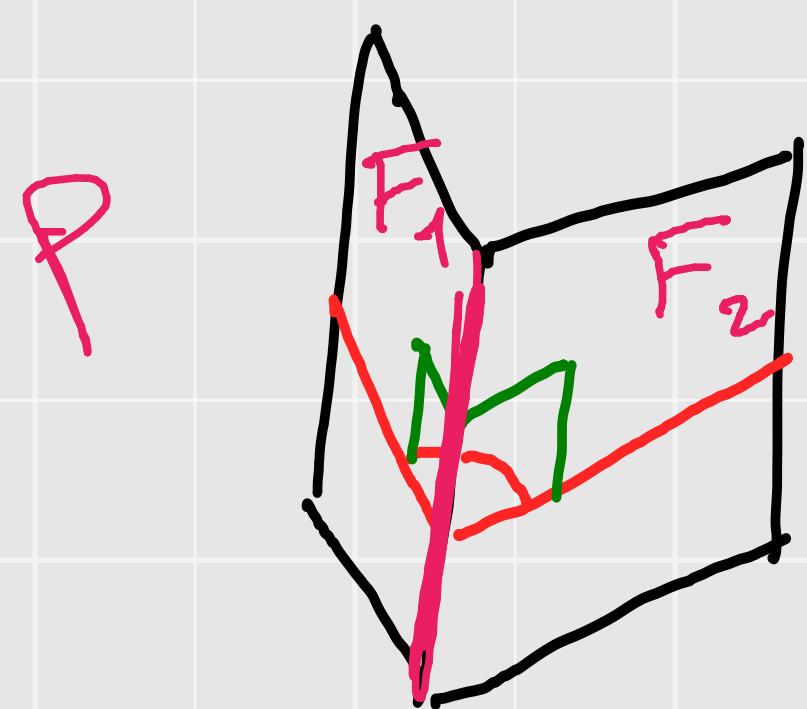
$$\Rightarrow \underbrace{4V - 8}_{\text{Euler}} \geq 4E - 4F = \sum_n (2n - 4) F_n = 2F_3 + 4F_4 + 6F_5 + \dots \geq N \quad \square$$



Dem. lema Cauchy: Considerar grafo dado por lados con signos.

$$N \leq 4V - 8 < 4V \Rightarrow \text{hay v\u00e9rtice con } < 4 \text{ cambios de signo.} \quad \square$$

Dem. teo. Cauchy: Consideramos \u00e1ngulos di\u00e9dros en lados de P, P' .



$$\begin{cases} \alpha_P < \alpha_{P'} & : \text{signo } (+) \\ \alpha_P = \alpha_{P'} & : \text{no signo} \\ \alpha_P > \alpha_{P'} & : \text{signo } (-) \end{cases}$$

[Lem 2 Si P, P' tienen \u00e1ng. diedros distintos, hay ≥ 4 cambios de signo en v\u00e9rtices etiquetados.]

As\u00ed que no hay v\u00e9rtices etiquetados. Sigue que $P \cong P'$ $\square$

Dem. Lem 2 Necesitamos el resultado geométrico siguiente:

Thm 2 Sean P, P' ^{2D} polígonos convexos con vértices $\{A_j\}_1^n, \{A'_j\}_1^n$. 2D

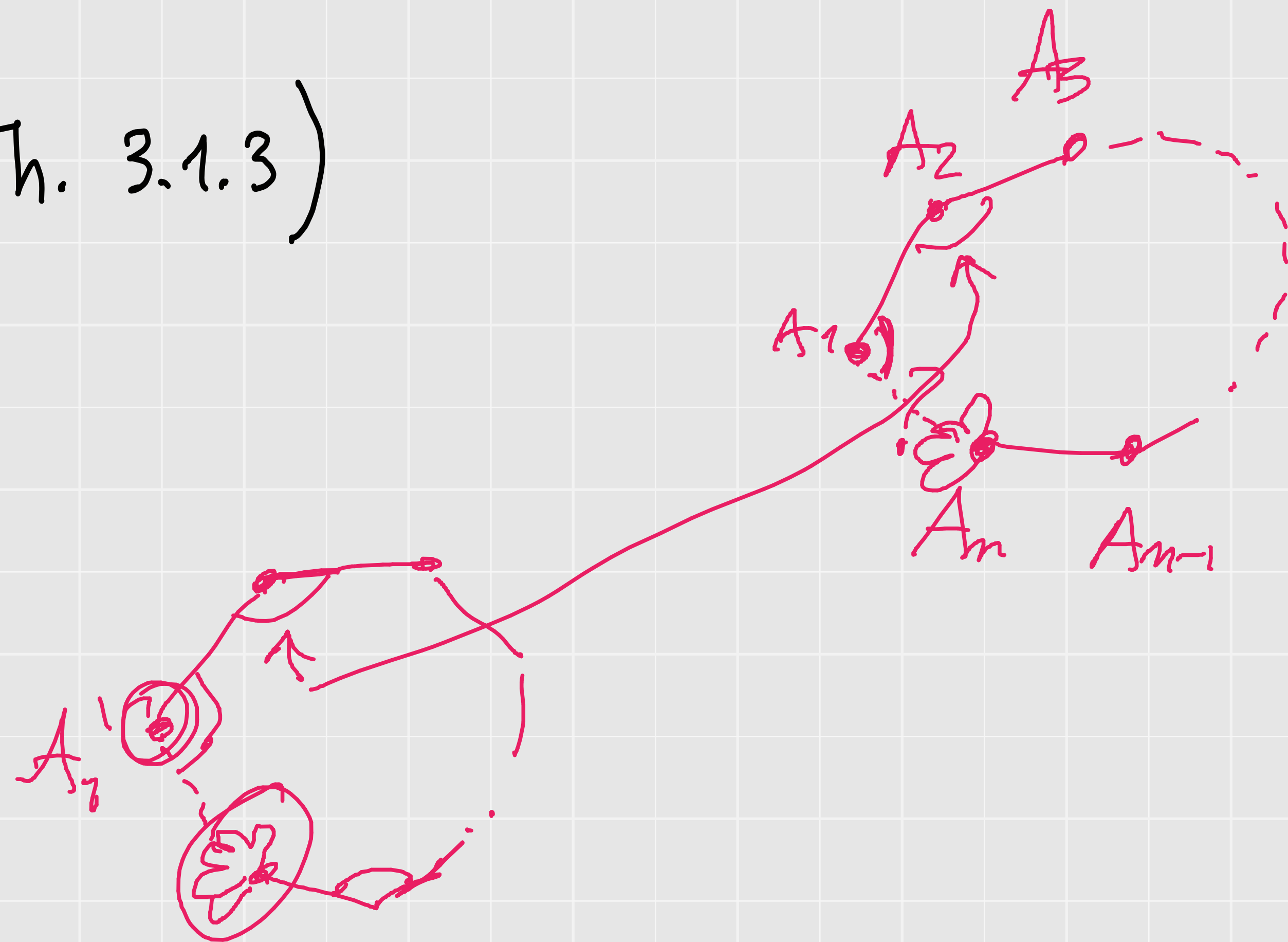
a) $A_1 A_2 = A'_1 A'_2, A_2 A_3 = A'_2 A'_3, \dots, A_{n-1} A_n = A'_{n-1} A'_n$

b) $\hat{A}_1 \leq \hat{A}'_1, \hat{A}_2 \leq \hat{A}'_2, \dots, \hat{A}_{n-1} \leq \hat{A}'_{n-1}$ no todos "=".

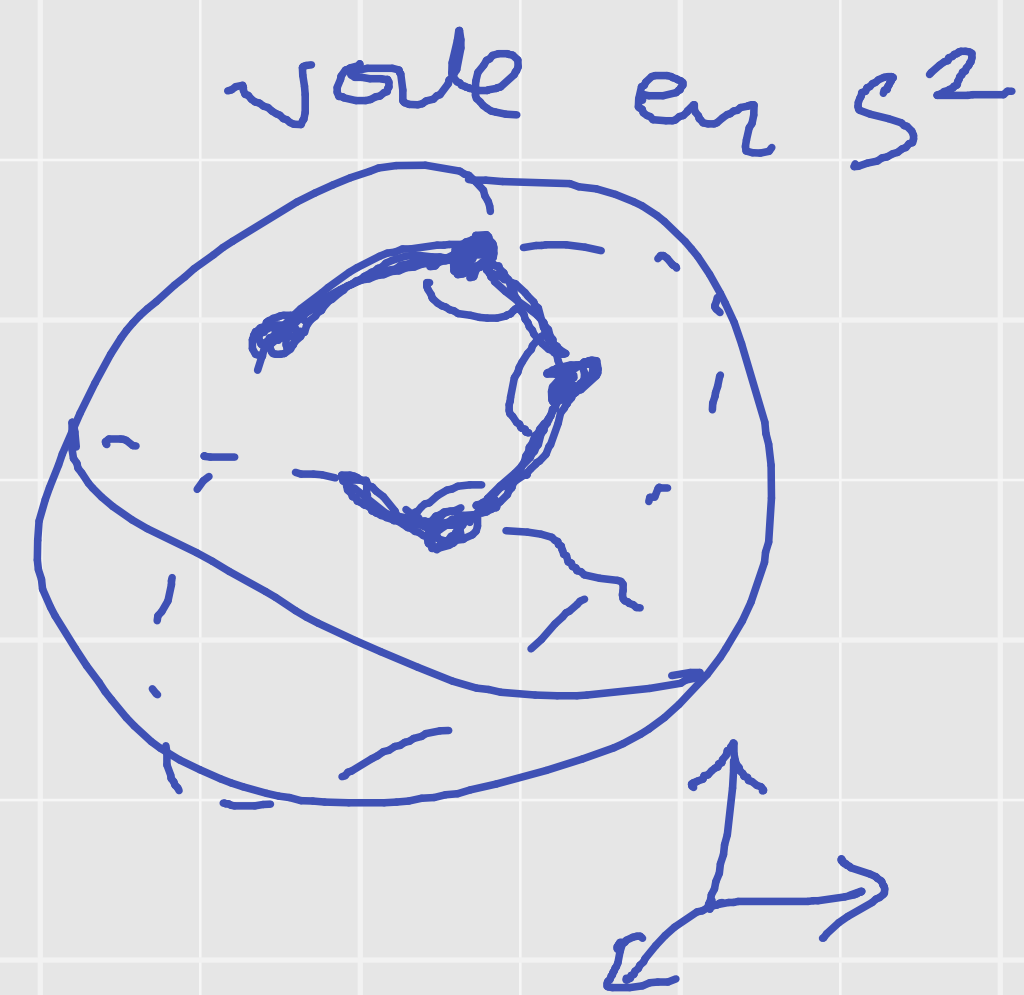
entonces, $A_n A_1 < A'_n A'_1$.

[Idea: "alargar el brazo"] (Alexandrov Th. 3.1.3)

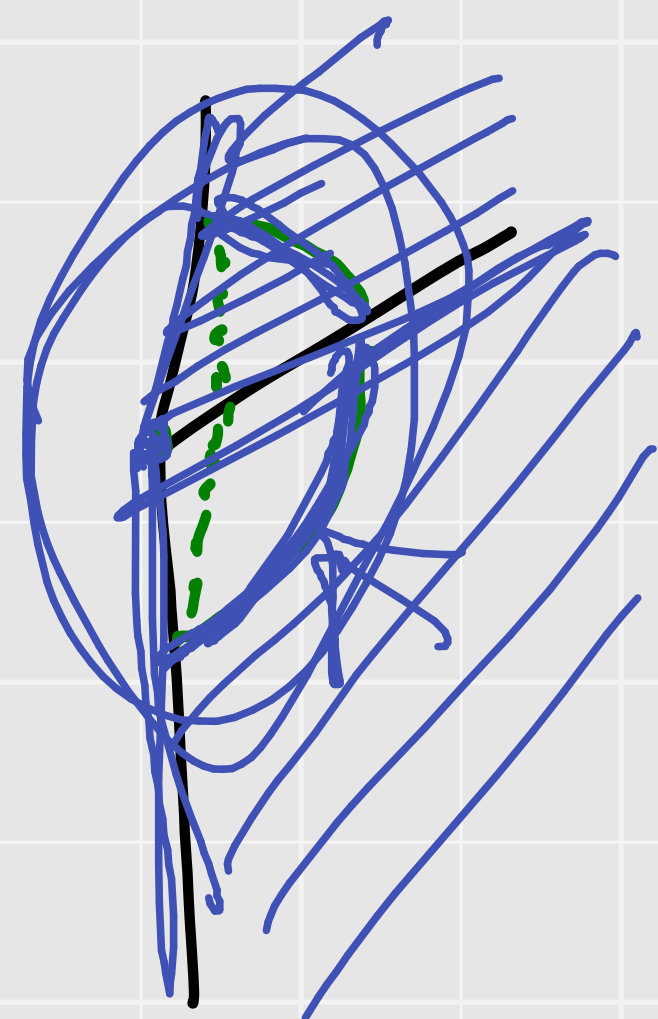
↳ Cuidado: hay que alargarlo convexamente



Claim (notación Hm. Cauchy): el teorema 2 nos indica que
si hay lados etiquetados, entonces hay signos $+$ y $-$.



Idea: Mirar un vértice de P, P' y centrar esfera ahí.



→ polígono convexo en la esfera (P y P')

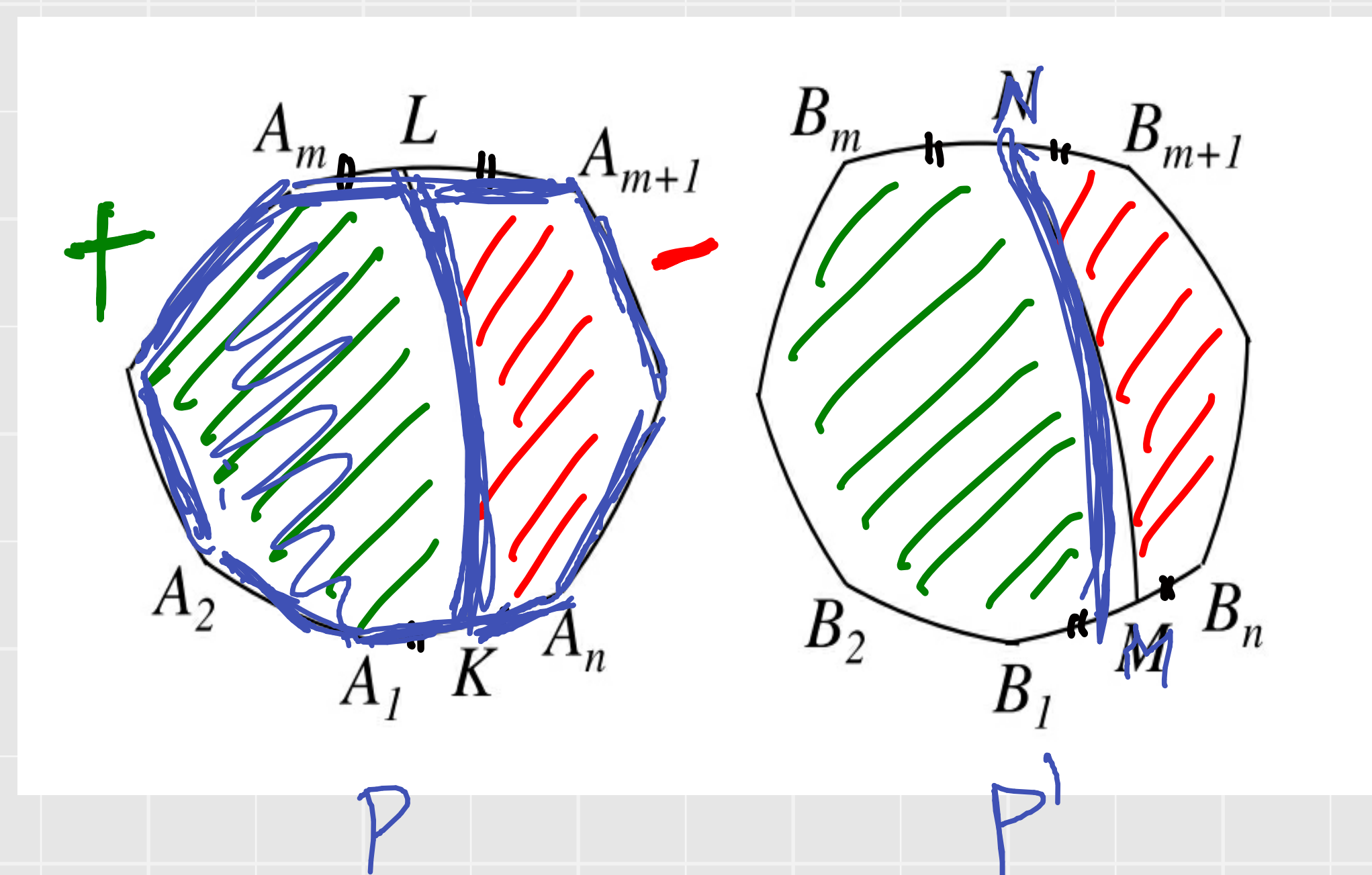
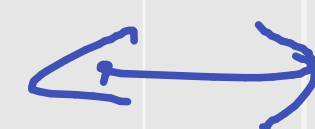
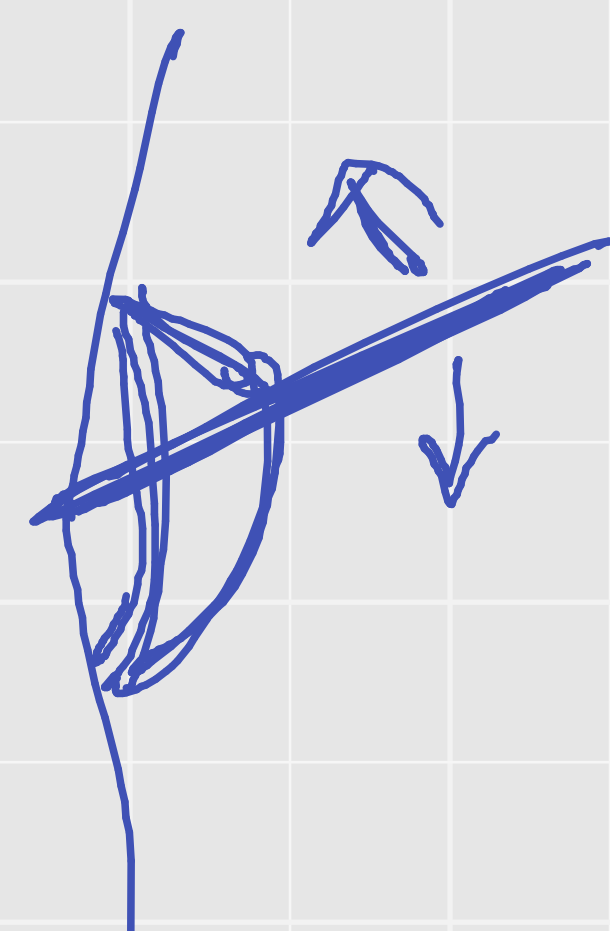
P, P' : caras tienen
ángulos =

→ aplicar teo. 2 : lados del poli. esférico para P, P' iguales

↳ si no hay cambios de signo
tenemos contradicción.

Claim: hay al menos 4 cambios de signo (si es que hay cambios)

- # cambios de signo es un número par
- Si hay solo 2 cambios de signo: teor. 2 "brazo"

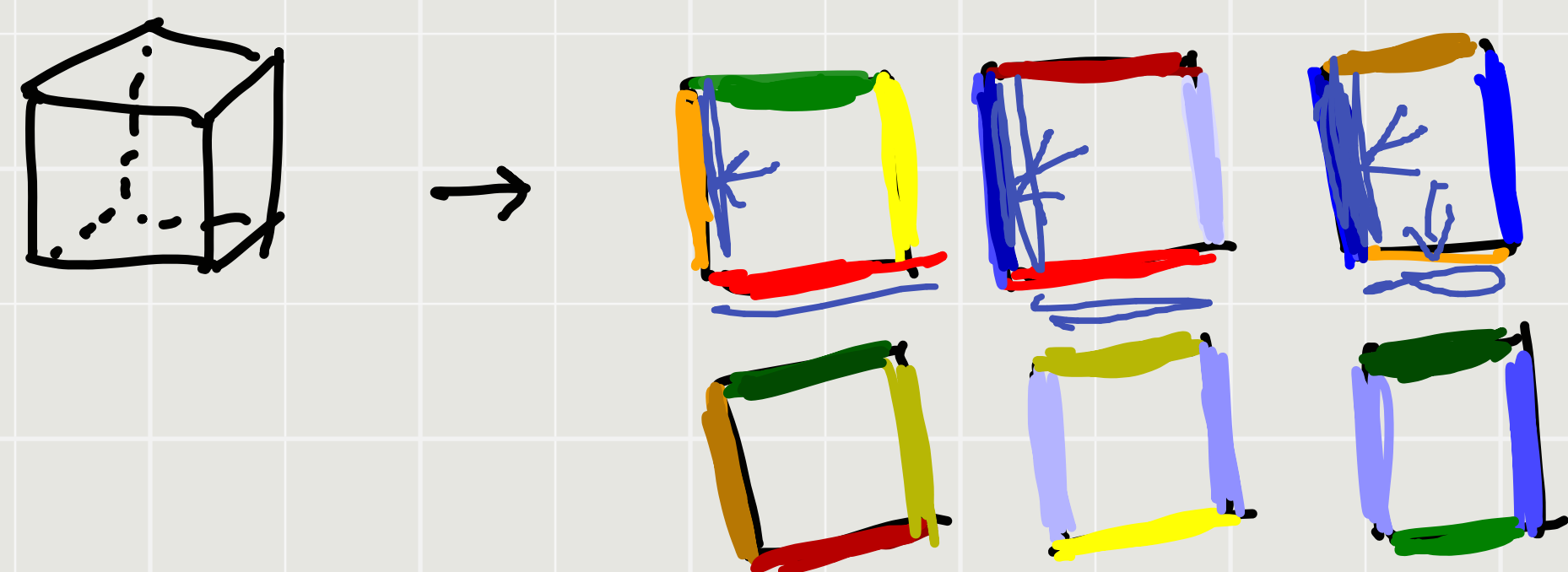


$\rightarrow LK \text{ (green)} MN \text{ (green)}$
 $\rightarrow LK \text{ (red)} MN \text{ (red)}$

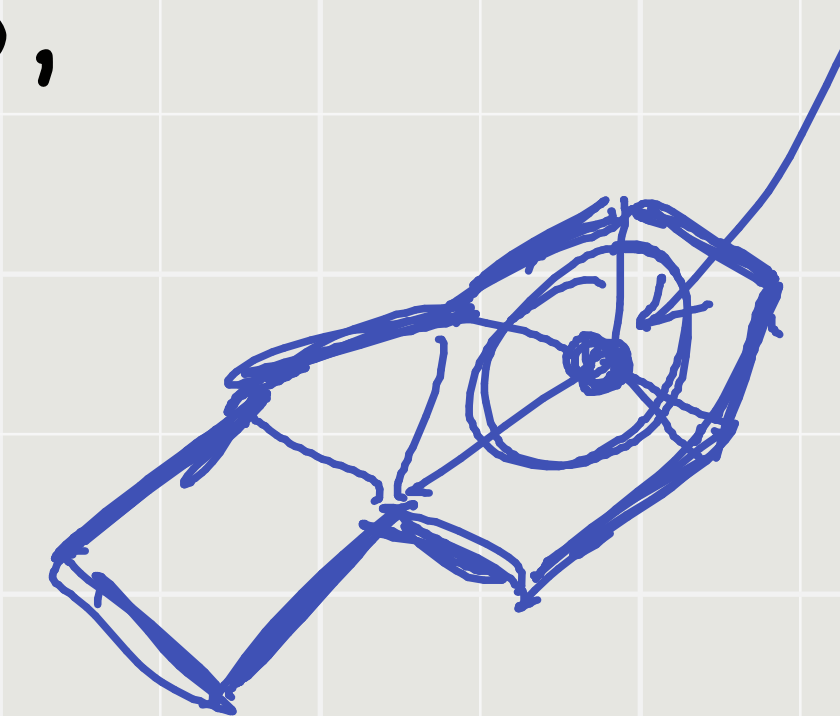
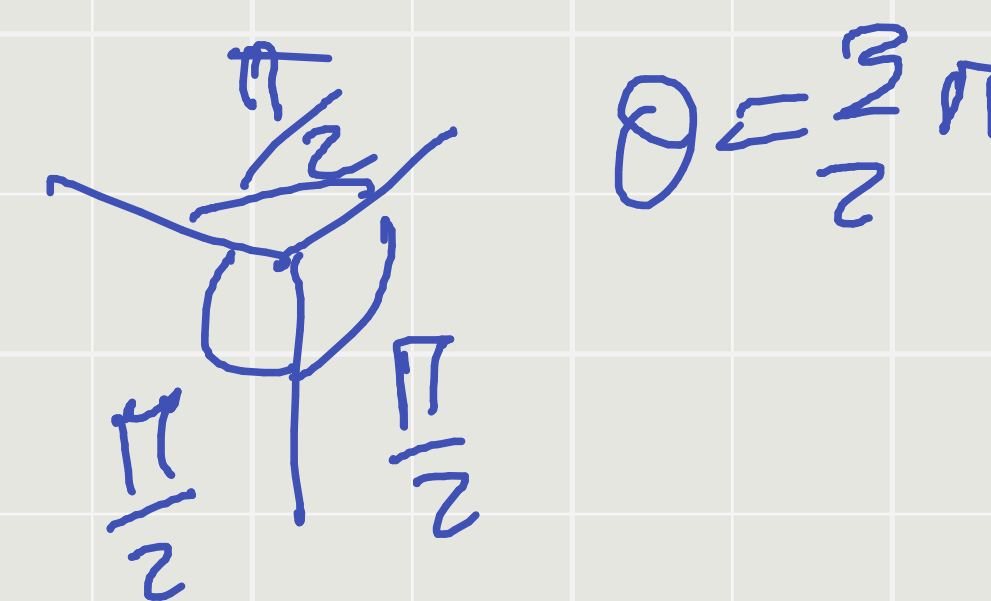
Sigue que podemos aplicar el "lema de Cauchy". $\square$

El Teorema de Alexandrov

- Desarrollo de una sup. poliedral: es una colección de polígonos con identificación de sus lados en la cual cada lado está

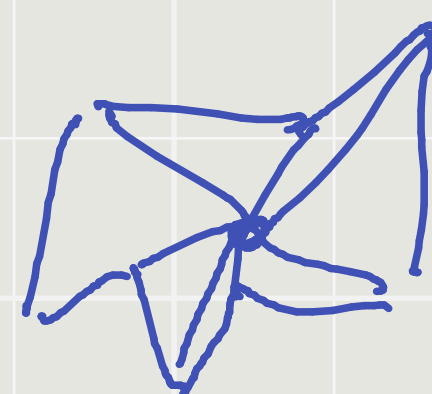


lados de identificado con a lo más 1 lado, de manera isométrica, formando un conjunto cociente conexo.



Def ángulo completo θ en punto no de borde = suma de los ángulos de polígonos adyacentes

curvatura en un vértice interno : $2\pi - \theta$ (el vértice es genuino si $\text{curv.} \neq 0$)



Var. Riem. (M^n_g) (para poliedros convexos, curv. ≥ 0)

$$\text{Vol}(B_r^M(x)) = Cr^n - \underbrace{C}_{>0} \text{curv. vertice } r^{n+2} + O(r^{n+4})$$

Teo (geodésicas en poliedros)

En un desarrollo de curvatura positiva $\forall x, y \exists$ arco de largo mínimo entre x, y . En los lados "no hay refracción" y el camino tiene un desarrollo plano. En este des. plano, el arco es un segmento. Puede "haber refracción" solo en vértices de borde cuyos ángulos completos son de $> \pi$.

Teo (Gauss Bonnet en superficies convexas)

un polígono geodésico en un desarrollo de curvatura positiva satisface

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^m \omega_j$$

ángulos internos del polígono #vértices del polígono curvaturas de vértices interiores

(Q: ¿ para polígonos en sup. poliedros generales?)

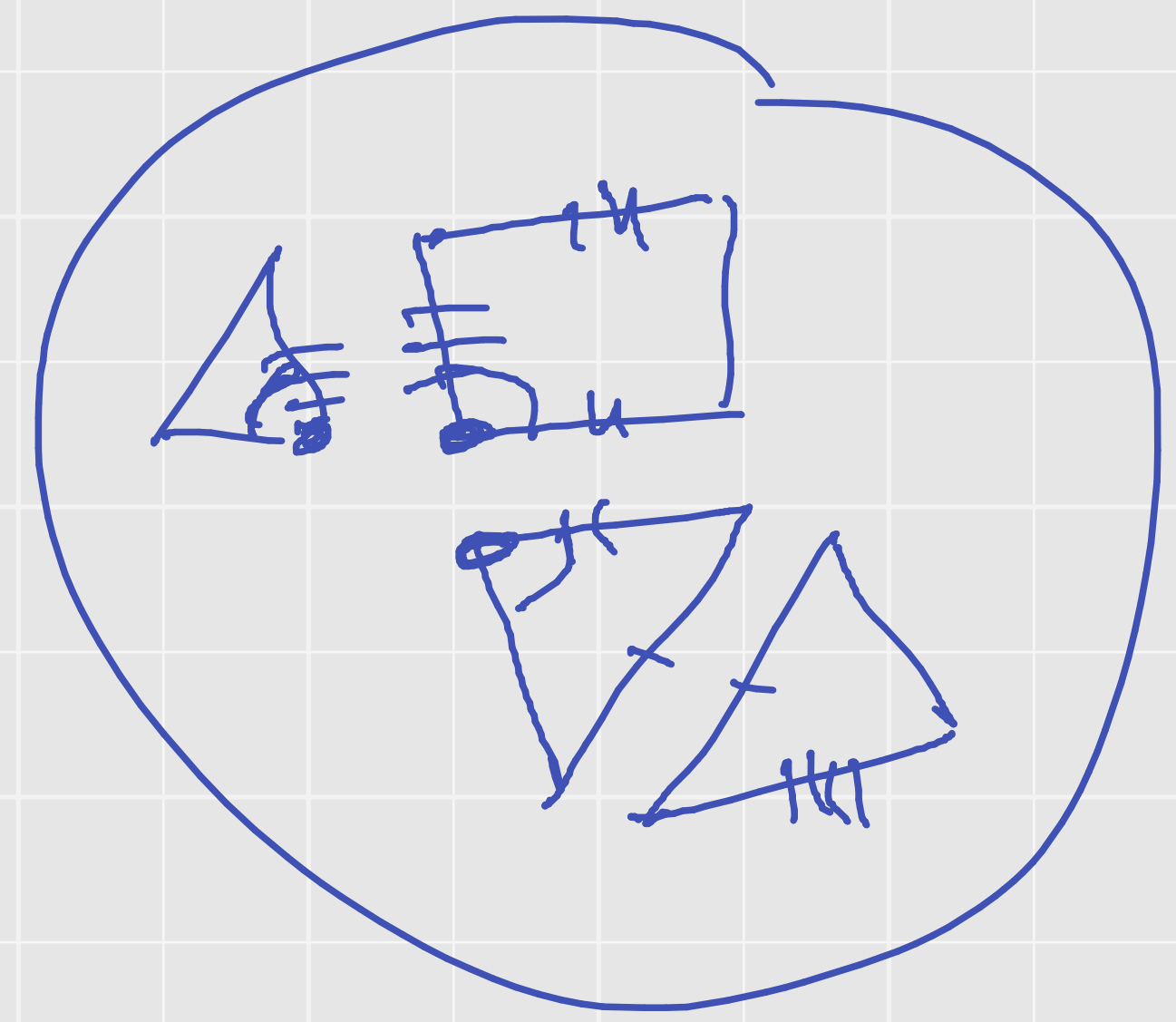
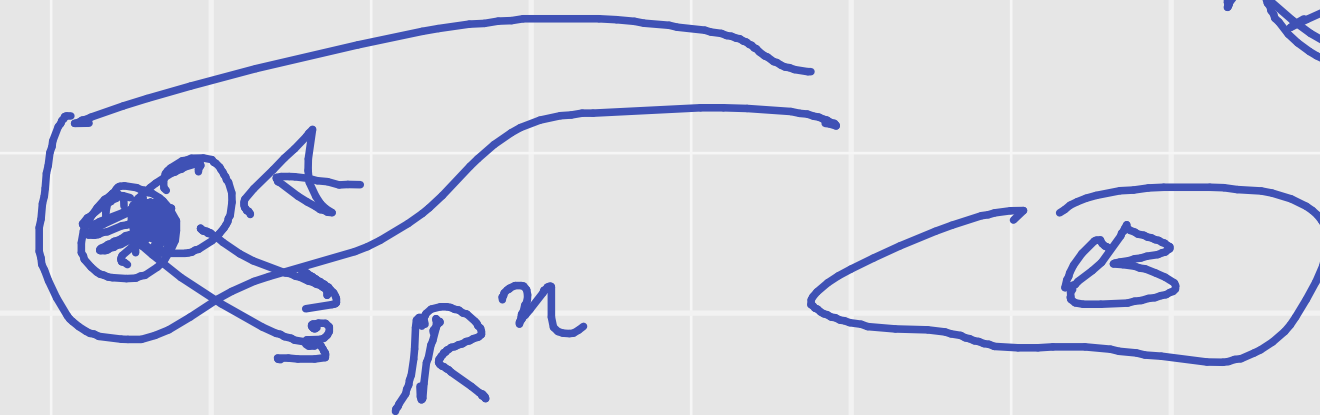
Teorema de Alexandrov [3.3 & 4.3 Alexandrov]

Un desarrollo con $V - E + F = 2$ y de curvatura ≥ 0 en cada v rtice define un poliedro convexo. Este poliedro es único a menos de isometrías de $\mathbb{R}^3$. (Cauchy++)

(posibilidad de vértices "ficticios" de curv. = 0)

Unicidad: ~ teo Cauchy

Existencia: varias estrategias



→ Alexandrov: • Lem 1 A, B variedades de la misma dimensión n , $\varphi: A \rightarrow B$

Si (1) toda componente conexa de B intersecta $\varphi(A)$

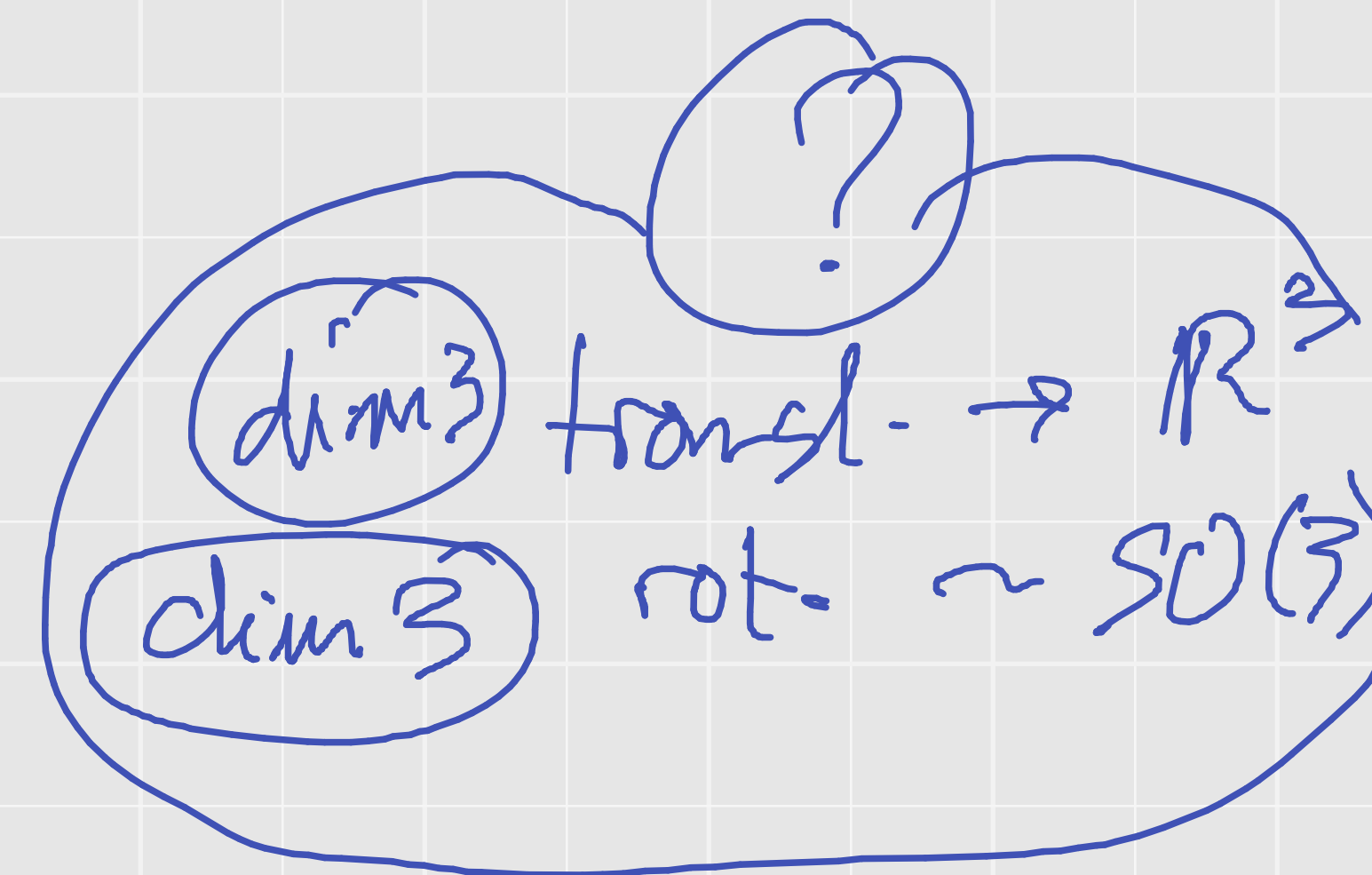
(2) φ inyectiva, continua

(3) $b_m = \varphi(a_m)$, $b_m \rightarrow b$ entonces $\exists a \in A$

$\varphi(a) = b$, $\exists$ subsucesión $a_{m_k} \rightarrow a$.

entonces $\varphi(A) = B$. [Alexandrov, Lem. 2.2.2.]

• Aplicar Lem 1 para $A = \{\text{desarrollos}\}_{\cong}$, $B = \{\text{poliedros triangulados}\}_{\cong}$
(variedades de dimensión $3V-6$)



→ Volkov: • "llenar poliedro", o sea transformar el desarrollo
[reprint 2020] en otro desarrollo 3D, en pirámides, cuyas
bases forman el desarrollo inicial.



• ángulos diedros alrededor
de lado interior $\leftrightarrow$ curvatura
3D

- buscamos llenamiento por "un pedazo de $\mathbb{R}^3$ "
o sea con curvatura cero
- Volkov demuestra que minimizando $\sum_{\substack{\text{p. lados} \\ \text{interiores}}} \ell_i$,
sobre "desarrollos 3D" "especiales",
el mínimo corresponde a curvatura cero.

Clase 2: Temas de rigidez en el continuo:

- immersiones en $\mathbb{R}^N$ que preservan largo
de curvas
- integración convexa
- microestructuras en Calc. Var.
- ejemplos en materiales, relación con rigidez
discreta