

Tarea 9

Fecha de Entrega: 15 de Mayo.

*Para obtener el puntaje máximo será suficiente entregar la solución de problemas que lleguen a un **total de al menos 5 puntos**, entre los problemas abajo. Cada problema vale un número de puntos indicado en parentesis, proporcional a la dificultad del problema.*

Problema 1 (3 puntos).

1. Cambia la prueba del teorema de Besicovitch para extenderlo al caso de que las bolas sean remplazadas por cubos.
2. Muestra que el teorema de Besicovitch en dimensión 1 no vale si remplazamos bolas por semi-intervalos (considera el conjunto de centros $A := (0, 1)$ y la familia $\mathcal{B} := \{[x, x + 1) : x \in A\}$).

Problema 2 (1 punto). Muestra el teorema de decomposición de Jordan, osea que si ν es una medida con signo sobre un espacio $(X, \mathcal{B})$ entonces existen y son unicas dos medidas $\nu^+, \nu^- : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, de las cuales a lo más una es finita, y tales que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ y $\nu^+ \perp \nu^-$.

Problema 3 (1 punto). Muestra que si ν es una medida con signo sobre $(X, \mathcal{B})$ entonces

$$|\nu|(A) = \inf \{ \nu'(A) : \nu' \text{ medida y } \forall A \in \mathcal{B}, \nu'(A) \geq |\nu(A)| \}.$$

Problema 4 (1 punto). Enuncia y demuestra la generalización del teorema de Radon-Nikodym para medidas a valores en un espacio vectorial V de dimensión finita.

Problema 5 (1 punto). Si ν_1, ν_2, μ son tres medidas con signo sobre X muestra que

1. Si f es una medida non-negativa μ -medible y $\nu(E) := \int_E f d\mu$ entonces $\nu \ll \mu$
2. Si $\nu_1 \perp \mu$ y $\nu_2 \perp \mu$ entonces $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.
3. Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$ entonces $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.
4. Si $\nu_1 \ll \nu_2$ y $\nu_2 \perp \mu$ entonces $\nu_1 \perp \mu$.
5. Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_1 \perp \mu$ entonces $\nu_1 = 0$.

Problema 6 (1 punto). Sea $\mathcal{B}$ la σ -algebra de Borel sobre $[0, 1]$ y sea μ la medida de Lebesgue y ν la medida que cuenta los puntos. Muestra que $\mu \ll \nu$. Muestra que no existe $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ tal que

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x).$$

Problema 7 (2 puntos). Muestra el teorema de Lusin para medidas de Borel: Si μ es una medida de Borel finita sobre un espacio X y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces para todo $A \subset X$ medible y todo $\epsilon > 0$ existe un cerrado $B \subset A$ tal que $f|_B$ es continua y $\mu(A \setminus B) < \epsilon$.

Problema 8 (3 puntos). Si μ, ν son medidas de positivas sobre $\mathbb{R}^n$ con μ Radon, entonces para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$M_\mu \nu(x) := \sup_{r>0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}.$$

1. Modifica la prueba del teorema maximal, ocupando el teorema de Besicovitch en vez que el teorema de Vitali, para mostrar que existe $C_1 > 0$ tal que para todo $t > 0$ vale

$$\mu(\{x : M_\mu \nu(x) > t\}) \leq \frac{C_1}{t} |\nu|(\mathbb{R}^n).$$

2. Cual es una cota posible para C_1 ?
3. Porqué no se puede obtener el mismo resultado ocupando el lemma de Vitali?
4. Para el caso $\nu = \nu_f$ con $\nu_f(A) := \int_A f d\mu$ y f una función positiva con $f \in L^p(\mu)$ y $1 < p < \infty$, muestra que

$$\int (M_\mu \nu_f)^p d\mu \leq C_p \int |f|^p d\mu,$$

$$\text{con } C_p = \frac{2^p p}{p-1} C_1.$$