

Tarea 8

Fecha de Entrega: 08 de Mayo.

*Para obtener el puntaje máximo será suficiente entregar la solución de problemas que lleguen a un **total de al menos 5 puntos**, entre los problemas abajo. Cada problema vale un número de puntos indicado en parentesis, proporcional a la dificultad del problema.*

En los dos problemas siguientes vamos a demostrar una versión del lema de Vitali que ocúpase recubrimientos infinitos, en el caso de $\mathbb{R}^d$ con la medida de Lebesgue m .

Problema 1 (3 puntos). Enunciado: Si $A \subset \mathbb{R}^d$ es acotado y $\mathcal{F}$ es una familia de bolas

$$\mathcal{F} := \{B(x, r(x)) : x \in A\}$$

con

$$\sup\{r(x) > 0 : x \in A\} < \infty,$$

entonces existe una familia a lo más numerable $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{B(x,r) \in \mathcal{F}'} B(x, 5r).$$

Pista:

- Sea $M := \sup_{x \in A} r(x)$. Contrariamente al lemma de Vitali finito hecho en clase, posiblemente no existe una bola $B(x, r(x))$ tal que $r(x) = M$, pero está suficiente de encontrar x_1 tal que $r(x_1) \geq 3/4M$.
- En un primer paso del algoritmo, continuamos a elegir bolas $B(x_j, r(x_j))$ con $r(x_j) \geq 3/4M$ y con x_j no contenido en bolas $B(x_i, 3r(x_i))$ con índices $i < j$, si tal x_j con $r(x_j) \geq 3/4M$ existe. Cuando no existe tal x_j este paso del algoritmo termina. Verifica que si $\mathcal{F}_1$ son todas las bolas de $\mathcal{F}$ con radio $r(x) \geq 3/4M$ y $\mathcal{F}(1)$ son las bolas construidas en este paso del algoritmo,

$$\cup \mathcal{F}_1 \subset \bigcup_{B(x_i, r(x_i)) \in \mathcal{F}(1)} B(x_i, 5r(x_i)).$$

- Sea ahora $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ la familia formada por las bolas que tienen radios $r(x) \geq (3/4)^2M$. Muestra que si una bola $B \in \mathcal{F}_2$ intersecta una bola $B' \in \mathcal{F}(1)$ entonces B está contenida en $3B'$.
- Construye cómo en el punto 2 una familia $\mathcal{F}(2) \subset \mathcal{F}_2$, y que denotamos continuando la sucesión de índices empezada en el punto 2, osea $\mathcal{F}(2) = \{B(x_i, r(x_i)), i > \#\mathcal{F}(1)\}$. Para la construcción procede iterativamente, adjuntando una nueva bola $B(x_j, r(x_j))$ solo cuando x_j está fuera de las bolas $B(x_i, 3r(x_i))$ con $\#\mathcal{F}(1) < i < j$.

- Muestra que todas las bolas de $\mathcal{F}$ con radio $r(x) \geq (3/4)^2 M$ están contenidas en la unión de todas las bolas $B(x, 5r(x))$ que son “engordamientos” de $B(x, r(x)) \in \mathcal{F}(1) \cup \mathcal{F}(2)$.
- Continúa iterativamente la construcción de los puntos precedentes construyendo familias $\mathcal{F}(k)$ para $k \geq 1$, y verifica el enunciado del problema.

Problema 2 (2 puntos). Generaliza el enunciado y la prueba del problema precedente (desde el caso de $\mathbb{R}^d$ con la medida de Lebesgue m) al contexto más general de un espacio X con bolas, y dónde está definida una medida doubling μ sobre este X .

Problema 3 (2 puntos). Enunciado: Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ acotado y $\mathcal{F}$ una familia de bolas de $\mathbb{R}^d$ tal que cada punto $x \in A$ está contenido en bolas arbitrariamente pequeñas de $\mathcal{F}$, o sea

$$\forall x \in A, \quad \inf \{r > 0 : \exists B(r, y) \in \mathcal{F}, x \in B(r, y)\} = 0.$$

En este caso existe una subfamilia numerable de bolas $B_i \in \mathcal{F}$ disjuntas tales que

$$m \left(A \setminus \bigcup_i B_i \right) = 0. \quad (1)$$

Además para cada $\epsilon > 0$ fijo se pueden elegir las B_i en modo que

$$\sum_i m(B_i) \leq m(A) + \epsilon. \quad (2)$$

Pista:

- Existe $U \supset A$ abierto con $m(U \setminus A) < \epsilon' < 1/5^n$. Utiliza el enunciado del problema precedente para encontrar bolas $B(x_i, r_i)$ disjuntas contenidas en U tales que $A \subset \bigcup_i B(x_i, 5r_i)$.
- Muestra que $m(A) \leq 5^n \sum_i m(B(x_i, r_i))$. Usando el punto precedente, muestra que existe $k_1 \geq 1$ tal que

$$m \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, r_i) \right) \leq (1 + \epsilon' - 2/5^n) m(A) < (1 - 5^{-n}) m(A).$$

Entonces las bolas $B(x_1, r_1), \dots, B(x_{k_1}, r_{k_1})$ cubren por lo menos una proporción 5^{-n} de la medida de A .

- Reemplazando A por $A_1 := A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, r_i)$ y aplicando los dos puntos precedentes a $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \setminus \{B(x_i, r_i) : 1 \leq i \leq k_1\}$ se obtiene un recubrimiento de A_1 por bolas disjuntas que cubre por lo menos 5^{-n} de A_1 , y un conjunto A_2 de “resto”, contenido en A_1 . Verifica que todas las hipótesis necesarias para iterar el razonamiento se cumplen.
- Muestra que iterando el punto precedente se llega a una subfamilia disjunta numerable de $\mathcal{F}$ que verifica (1).

- Verifica que eligiendo $\epsilon' > 0$ oportunamente, se puede obtener (2) también.

Problema 4 (1 punto). Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-medible, sea $M_\Delta f$ la *función maximal diadica* respecto a la medida de Lebesgue, osea

$$M_\Delta f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dx,$$

dónde Q varia entre todos los cubos diádicos que contienen x .

Muestra que existen $c_d, C_d, A_d > 0$ dependientes solo de d tal que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vale para todo $\lambda > 0$

$$|\{M_\Delta f \geq C_d \lambda\}| \leq |\{Mf \geq \lambda\}| \leq A_d |\{M_\Delta f \geq c_d \lambda\}|.$$

Problema 5 (1 punto). Muestra que la conclusión del teorema de Besicovitch continua a valer si en el teorema las bolas cerradas se substituyen por otros conjuntos C cerrados aproximables por bolas en el sentido que existe $M > 0$ que satisface

$$\sup_{C \in \mathcal{C}} \frac{\inf \{ \rho > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } C \subset B(x, \rho) \}}{\sup \{ \rho > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } B(x, \rho) \subset C \}} \leq M.$$

En particular, muestra que esto vale cuando en el teorema de Besicovitch se toman, en vez de bolas, medias bolas cerradas

$$\overline{B(x, \rho)} := \{y : |y - x| \leq \rho, (y - x) \cdot \hat{n} \geq 0\},$$

dónde $\hat{n}$ es un vector de norma 1 fijo.

Problema 6 (1 punto). Muestra que si $A \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto acotado y $\rho : A \rightarrow (0, +\infty)$ es una función, entonces existe $S \subset A$ a lo más numerable tal que

$$A \subset \bigcup_{x \in S} \overline{B(x, \rho(x))}$$

y que cada punto $y \in \mathbb{R}^d$ apartenece a $\leq M$ bolas con centros en S .

Problema 7 (1 punto). Sea μ una medida doubling sobre un espacio metrico X , tal que $\mu(B) < \infty$ para toda bola $B \subset X$. La desigualdad maximal que vimos en clase para funciones $f \in L^1(\mu)$ se generaliza si remplazamos “ $f(x)d\mu(x)$ ” por una medida finita más general. Sea entonces ν una medida finita sobre el mismo espacio de medida dónde está definida μ y definamos una “función maximal de $d\nu$ ” de la manera siguiente:

$$M(d\nu)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} d\nu = \sup_{r>0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}.$$

Verifica que en este caso vale el analogo de nuestra desigualdad maximal $L^{1,\infty}$, más precisamente muestra que para todo $\alpha > 0$ vale

$$\mu(\{x : M(d\nu)(x) > \alpha\}) \leq \frac{c}{\alpha} \nu(X).$$

Pista: aplica el lemma de Vitali y imita la prueba hecha en clase, con cuidado a que todos los pasos sean justificados

Problema 8 (1 punto). Suponemos que μ y ν son medidas positivas sobre los borelianos de $\mathbb{R}^n$, y para toda bola B vale $\mu(B), \nu(B) < \infty$ y vale la implicación $\nu(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$. En este caso definamos la función maximál

$$M_\nu f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\nu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f| d\mu.$$

Muestra que existe $C > 0$ dependiente solo de la dimensión tal que

$$\nu(\{x : M_\nu f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f| d\mu.$$

Pista: Ocupa la estrategia que usaba el teorema de Vitali para la desigualdad maximal, y pero esta vez usa el teorema de Besicovitch.