

Tarea 7

Fecha de Entrega: 30 de Abril.

Problema 1 (Ejercicios 1.6.5 y 1.6.6 de Tao). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $F(x) := \int_{(-\infty, x]} f(t)dt$.

1. Muestra que F es continua.
2. Si para c.t. $x \in \mathbb{R}$ valen

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f(t)dt = f(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x-h, x]} f(t)dt,$$

muestra que F es diferenciable en casi todo $x \in \mathbb{R}$ y vale $F'(x) = f(x)$ para c.t. $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2 (Lemma 1.6.17 de Tao). Sean $-\infty < a < b < +\infty$ y sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Demuestra que existe una familia a lo más numerable de intervalos abiertos no vacíos $I_n = (a_n, b_n)$ tales que

1. Para cada n vale $F(a_n) = F(b_n)$ o vale $a_n = a$ y $F(b_n) \geq F(a_n)$.
2. Si $x \notin \bigcup_{n \geq 1} I_n$ entonces para cada $y \in [x, b]$ vale $F(y) \leq F(x)$.

Problema 3 (Ejercicio 1.6.12 de Tao). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ a valores en $\mathbb{R}$, y

$$f^*(x) := \sup_{h \geq 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f(t)dt.$$

Demuestra que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (incluso $\lambda = 0$ o $\lambda < 0$) vale

$$\lambda m(\{x : f^*(x) > \lambda\}) \leq \int_{\{x : f^*(x) > \lambda\}} f(x)dx,$$

dónde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Pista: considera el caso $\lambda = 0$ primero, ocupando el problema precedente.

Problema 4 (Ejercicio 1.6.13 de Tao). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\lambda > 0$, muestra que

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \sup_{h > 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} |f(t)|dt \geq \lambda\right\}\right) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt.$$

Pista: considera inicialmente el caso cuando f tiene soporte compacto, y aplica el Problema 2 a un intervalo que contiene este soporte.

Problema 5. Sea $\mathcal{B}$ una σ -álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}^d$. Suponemos que sean datos conjuntos $B(x, r) \in \mathcal{B}$ con $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$, una medida μ sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, tales que existan constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

1. Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ vale $B(x, r_1) \subset B(x, r_2)$ si $r_1 \leq r_2$.
2. Para todos $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$ tales que $B(x, r) \cap B(y, r) \neq \emptyset$, vale también $B(y, r) \subset B(x, c_1 r)$.
3. Para todos $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$ vale $\mu(B(x, c_1 r)) \leq c_2 \mu(B(x, r))$

(a) Verifica que si $\mathcal{B}$ son los conjuntos Lebesgue-medibles, $B(x, r)$ son las bolas abiertas usuales, μ es la medida de Lebesgue, entonces valen las propiedades arriba.

(b) Verifica que si valen las propiedades arriba, entonces existe una constante $c > 0$ tal que para toda familia $\mathcal{F}$ finita de conjuntos $B(x, r)$ existe una subfamilia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ disjunta tal que

$$\sum_{B' \in \mathcal{F}'} \mu(B') \geq c \mu \left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right).$$

Problema 6 (Ejercicios 1.6.24 y 1.6.25 (i) de Tao). Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto Lebesgue-medible, un punto $x \in \mathbb{R}^d$ se llama *punto de densidad de E* si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(E \cap B(x, r))}{m(B(x, r))} = 1.$$

(Por ejemplo si $E = [-1, 0) \cup (0, 1]$, los puntos de densidad de E son $(-1, 1)$. Entonces, intuitivamente, un punto de densidad es un punto “casi interi3r” de E , en el sentido que casi toda la medida de una bola muy pequeña centrada en este punto, pertenece a E .)

1. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ medible, muestra que casi todo punto $x \in E$ es un punto de densidad de E , y casi todo punto $x \notin E$ no es un punto de densidad de E .
2. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible y $m(E) > 0$, entonces muestra que para todo $\epsilon > 0$ existe un cubo $Q \subset \mathbb{R}^d$ tal que $m(E \cap Q) > (1 - \epsilon)m(Q)$.

Problema 7 (Ejercicio 1.6.27 de Tao). Llamaremos *buen kernel* una funci3n $P : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ con $P \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que existe $\tilde{P}$ tal que $P(x) = \tilde{P}(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, con $\tilde{P} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ no creciente. En este caso decimos que las funciones $P_t(x) := \frac{1}{t^d} P\left(\frac{x}{t}\right)$ con $t > 0$ forman una *buen familia de aproximaciones de la identidad*.

1. Demuestra que los kernels del calor no normalizados $P_t(x) := \frac{1}{t^d} e^{-|x|^2/t^2}$ fy los kernels de Poisson no normalizados $P_t(x) := \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(d+1)/2}}$ forman buenas familias de aproximaciones de la identidad.

2. Demuestra que si P es un buen kernel, entonces existen $0 < c_d < C_d$ tales que

$$c_d \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{dn} \tilde{P}(2^n) \leq C_d.$$

Pista: compara P con $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 1_{2^{n-1} < |x| \leq 2^n} \tilde{P}(2^n)$.

3. Demuestra que existe $\tilde{C}_d$ tal que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vale

$$|f * P_t(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) P_t(x-y) dy \right| \leq \tilde{C}_d Mf(x).$$

4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, P es un buen kernel con $\int_{\mathbb{R}^d} P(x) dx = 1$ y x es un punto de Lebesgue de f entonces

$$\lim_{t \downarrow 0} f * P_t(x) = f(x).$$

Pista: usa la decomposición $f(y) = f(x) + (f(y) - f(x))$ y los puntos precedentes.

Problema 8. Sea μ una medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ cómo en problema 5 (para $d = 1$).

1. Muestra que si μ es una medida σ -finita, $\alpha > 0$ y $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mu)$ entonces

$$\frac{1}{\alpha} \int_A |f| d\mu - \mu(A) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{|f| > \alpha} |f| d\mu - \mu(\{|f| > \alpha\}).$$

(Definición: decimos $f \in L^1_{\text{loc}}(X, \mu)$ si para todo $K \subset X$ de medida μ finita vale $f \in L^1(K, \mu|_K)$. En el caso $X = \mathbb{R}^d$ es equivalente de verificar $f \in L^1(B(0, R_n), \mu)$ para una sucesión con $R_n \rightarrow \infty$.)

2. Usa este resultado para mostrar que para todo $\alpha > 0$ y toda f localmente integrable vale

$$\mu(\{|f| > \alpha\}) + \mu(\{Mf > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{|f| > \alpha} |f| d\mu + \frac{1}{\alpha} \int_{Mf > \alpha} |f| d\mu.$$

Nota que la igualdad se cumple si $\alpha = 1$ y $f(x) = |x|^{-1/p}$.

3. Usando el paso precedente, muestra que para $1 < p < \infty$ el operador “función maximal” M envía $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ en $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ y es acotado por A_p , donde A_p es la única solución positiva de

$$(p-1)x^p - px^{p-1} - 1 = 0.$$

(Definición: un operador $A : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ entre espacios vectoriales normados es acotado por $C > 0$ cuando vale $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.)

Problema 9. Sea $1 < p < \infty$ y sea $A_{d,p} > 0$ la menor constante posible tal que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq A_{d,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Muestra que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} A_{d,p} = +\infty.$$

Pista: Sea $f_{0,d} := 1_{B^d(0,1)}$ donde $B^d(0,1)$ es la bola unitaria de $\mathbb{R}^d$. Considera los promedios dados por $|B_x|^{-1} \int_{B_x} f_{0,d}(y) dy$ donde $x \in \mathbb{R}^d$ con $|x| > 1$ y B_x es la bola de centro $\frac{1}{2}(|x| - |x|^{-1}) \frac{x}{|x|}$ y radio $\frac{1}{2}(|x| + |x|^{-1})$.

Problema 10 (Ejercicio 1.6.20 de Tao + extra). Definamos

$$M_d f(x) := \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy : Q \text{ c\u00fabo diadico, } x \in Q \right\}.$$

1. Muestra que M_d env\u00eda $L^1(\mathbb{R}^d)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ con norma a lo m\u00e1s 1, osea que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vale

$$\|M_d f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Pista: Imita la prueba hecha por bolas. Nota que dados dos c\u00fabos diadicos Q, Q' , cuando no est\u00e1n disjuntos vale que uno contiene al otro. Esto ayuda para el lemma de recubrimiento ocupado en la prueba, y permite de hacerlo m\u00e1s expl\u00edcito.

2. Muestra que M_d env\u00eda $L^p(\mathbb{R}^d)$ en si con norma a lo m\u00e1s $\frac{p}{p-1}$, osea que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ vale

$$\|M_d f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$