

Tarea 6

Fecha de Entrega: 24 de Abril.

Problema 1. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles se llama *Cauchy en medida* si para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todos $m, n \geq n_0$ vale

$$\mu(\{|f_m - f_n| > \epsilon\}) < \epsilon.$$

Muestra que cada sucesión que es Cauchy en medida tiene una sub-sucesión que converge c.t.p.

Problema 2. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Muestra que f es integrable si y solo si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{|f| > 2^n\}) < \infty$ y que existen $c, C > 0$ tales que para toda f medible vale

$$c \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{|f| > 2^n\}) \leq \int_X |f| d\mu \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{|f| > 2^n\}).$$

Cuales son los valores de c, C lo mas cerca de 1 posibles para los cuales estas desigualdades continuan a valer para toda f medible?

Problema 3. Demuestra que si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible y

$$g(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < M_1, \\ \max\{k \in \mathbb{N} : M_k \leq j\} & \text{si } j \geq M_1, \end{cases}$$

dónde $M_k \in \mathbb{N}$ forman una sucesión creciente, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} g(j) \mu(\{|f| > j\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M_k}^{\infty} \mu(\{|f| > j\}).$$

Problema 4. Muestra que si $G : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ es una función creciente diferenciable y $G \circ |f| : X \rightarrow [0, +\infty)$ es integrable, entonces

$$\int_X G(|f(x)|) d\mu(x) = \int_0^{\infty} G'(\lambda) \mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) d\mathcal{L}^1(\lambda),$$

dónde $\mathcal{L}^1$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

(Pista: ocupa la definición de integral y discretiza siguiendo los valores de $|f|$.)

Sea ahora $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Consideramos de nuevo la función de distribución de f , ya definida en el problema 1* de la tarea 5, por

$$F_f(\lambda) := \mu(\{|f| > \lambda\}).$$

La función de distribución nos permite de hablar más facilmente de las medidas de sobreniveles de f .

Problema 5. 1. Si $f(x) = \sum_{j=1}^N a_j 1_{E_j}(x)$ es una función simple, encuentra su función de distribución.

2. Muestra que $F_{f+g}(\alpha + \beta) \leq F_f(\alpha) + F_g(\beta)$.

3. Muestra que $F_{fg}(\alpha\beta) \leq F_f(\alpha) + F_g(\beta)$.

Problema 6. Para $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible y $0 < p < \infty$ definamos la norma L^p -débil por

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} := \inf \left\{ C > 0 : F_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \text{ por todo } \lambda > 0 \right\}.$$

1. Muestra que $\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} = \sup \{ \gamma F_f(\gamma)^{1/p} : \gamma > 0 \}$.

2. Muestra que cuando las cantidades abajo están finitas, vale

$$\|f + g\|_{L^{p,\infty}} \leq \max\{2, 2^{1/p}\} (\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}).$$

(Pista: ocupa el punto 2 del problema precedente, con $\alpha = \beta = \alpha/2$)

3. Muestra que $f \in L^p(\mu) \Rightarrow f \in L^{p,\infty}(\mu)$.

Recordamos que $\|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$.

Problema 7. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Define

$$I_f := \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p \leq \infty : f \in L^p(\mu)\}.$$

Demuestra que I_f es un intervalo. Si definamos $\phi_f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi_f(p) := p \log \|f\|_{L^p(\mu)}$, demuestra que ϕ_f es continua.

Problema 8. Demuestra que si $0 < p < \infty$ entonces existe $C_p > 0$ tal que para todas $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles vale

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)} \leq C_p (\|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}).$$

Cual es el mejor valor de la constante C_p para $0 < p < 1$?

Problema 9. 1. Muestra que $L^\infty(\mu)$ es un espacio de Banach, osea que si f_n es una sucesión de Cauchy respecto a la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} := \inf \{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ para } \mu\text{-c.t. } x\}.$$

entonces f_n tiene un límite en esta norma.

2. Muestra que si $f \in L^{p_0}(\mu)$ y $p_0 < \infty$ entonces $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^\infty}$.

Problema 10. Sea $\mu(X) = 1$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible $0 < p < \infty$. Muestra que

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \geq \exp \left(\int_X \log |f(x)| d\mu(x) \right).$$

Muestra que si existe $r > 0$ tal que $\|f\|_{L^r(\mu)} < \infty$ entonces

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_{L^p(\mu)} = \exp \left(\int_X \log |f(x)| d\mu(x) \right),$$

(Pistas: (a) para una función convexa $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ si $\mu(X) = 1$ vale $\int_X \phi(|h|) d\mu \geq \phi \left(\int_X |h| d\mu \right)$. (b) Vale el límite $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p}(t^p - 1) = \log t$ para todo $t > 0$.)

Problema 11. Sea $k_s(x) = \frac{1}{|x|^s}$ con $0 < s$ un número real.

1. Para cuales valores de s vale $k_s \in L^p([-1, 1]^d)$? Para cuales valores vale $k_s \in L^{p,\infty}([-1, 1]^d)$? Cómo cambian las respuestas substituyendo $[-1, 1]^d$ con $\mathbb{R}^d$?
2. Si $k_s \in L^p([-1, 1]^d)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$ definimos $k_{s,x_0}(y) := k_s(y - x_0)$ para $y \in [-1, 1]^d$.

Muestra que entonces la función $K_s : \mathbb{R}^d \rightarrow L^p([-1, 1]^d)$ dada por $K_s(x_0) := k_{s,x_0}$ es continua respecto a la norma L^p (osea si $x_n \rightarrow x_\infty$ en $\mathbb{R}^d$, vale $K_s(x_n) \rightarrow K_s(x_\infty)$ en L^p).

Problema 12. Si $\mu(X) = 1$ y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es medible, demuestra que

$$\sqrt{1 + \|f\|_{L^1(\mu)}^2} \leq \int_X \sqrt{1 + f^2} d\mu \leq 1 + \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Encuentra una interpretación geométrica de esta desigualdad cuando μ es la medida de Lebesgue restringida a $[0, 1]$ y $f = F'$ es la derivada de una función suave $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Cuando se tiene igualdad en estas desigualdades?

Problema 13. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, con $f \in L^\infty(\mu)$. Considera el conjunto

$$M(f) := \left\{ \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu : E \in \mathcal{B}, 0 < \mu(E) < \infty \right\} \subset \mathbb{C}.$$

Cómo está relacionado $M(f)$ con $\|f\|_{L^\infty(\mu)}$?