

Tarea 5

Fecha de Entrega: 17 de Abril. Para tener la nota maxima sera suficiente entregar

5 o más problemas.

En todos los problemas, cuando no está especificado, el espacio de medida considerado es $(X, \mathcal{B}, \mu)$ y las convergencias consideradas son para $n \rightarrow \infty$.

Problema 1 (Verificación que las implicaciones entre modos de convergencia no discutidas en clase no valen en general). Encuentren sucesiones de funciones medibles $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ medible tales que

- $f_n \rightarrow f$ en L^1 y casi uniformemente, pero no en L^∞ .
- $f_n \rightarrow f$ en medida, que no convergan en L^1 y no convergan puntualmente en casi todas partes.
- $f_n \rightarrow f$ puntualmente c.t.p., en L^1 y no casi uniformemente.
- $f_n \rightarrow f$ puntualmente c.t.p., en medida y no en L^1 y no casi uniformemente.

Problema 2 (Ejercicio 1.5.3 de Tao). Sean $f_n = A_n 1_{E_n}$ funciones simples con E_n medible y $A_n > 0$. Demuestre que

- $f_n \rightarrow 0$ uniformemente si y solo si $A_n \rightarrow 0$
- $f_n \rightarrow 0$ en L^∞ también si y solo si $A_n \rightarrow 0$
- $f_n \rightarrow 0$ casi uniformemente si y solo si $A_n \rightarrow 0$ o $\mu(E_N^*) \rightarrow 0$
- $f_n \rightarrow 0$ puntualmente si y solo si $A_n \rightarrow 0$ o $\mu(\cap_{N=1}^\infty E_N^*) = 0$
- $f_n \rightarrow 0$ en medida si y solo si $A_n \rightarrow 0$ o $\mu(E_n) \rightarrow 0$
- $f_n \rightarrow 0$ en L^1 si y solo si $A_n \mu(E_n) \rightarrow 0$.

Problema 3 (Ejercicio 1.5.4 de Tao). Sea $\mu(X) < \infty$ y $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ son medibles. Demuestre que $f_n \rightarrow f$ en L^∞ si y solo si $f_n \rightarrow f$ en L^1 .

Problema 4 (Ejercicio 1.5.5 de Tao). Sean $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ con $\sum_{n=1}^\infty \|f_n - f\|_{L^1(\mu)} < \infty$. Muestra que entonces $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.

Problema 5 (Ejercicio 1.5.6 de Tao). Sean $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles tales que $f_n \rightarrow f$ en medida. Muestra que existe una sub-sucesión f_{n_j} tal que $f_{n_j} \rightarrow f$ casi uniformemente para $j \rightarrow \infty$.

Problema 6 (Ejercicio 1.5.8 de Tao). Sean $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles. Muestra que los siguientes son equivalentes:

- $f_n \rightarrow f$ en medida,
- por cada sub-secuencia f_{n_j} , existe una sub-sub-secuencia $f_{n_{j_i}}$ tal que $f_{n_{j_i}} \rightarrow f$ casi uniformemente para $i \rightarrow \infty$.

Problema 7 (Ejercicio 1.5.9 de Tao). Sean $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles con f_n una sucesión dominada. Muestra que $f_n \rightarrow f$ en L^1 si y solo si $f_n \rightarrow f$ en medida.

Problema 8 (Ejercicios 1.5.10 (iii) y 1.5.12 de Tao).

1. Encuentra una sucesión de funciones uniformemente integrables no dominadas.
2. Si $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ satisfacen $\sup_n \int_X |f_n|^p d\mu < \infty$ con $1 < p < \infty$ entonces muestra que f_n son uniformemente integrables.

Problema 9 (Ejercicios 1.5.13 y 1.5.14 de Tao + extra).

1. Sean $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ uniformemente integrables. Muestra que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall E \in \mathbb{B} \text{ con } \mu(E) < \delta, \quad \forall n \geq 1, \quad \int_E |f_n| d\mu \leq \epsilon. \quad (1)$$

2. Sea $\mu(X) < \infty$ y sean $f_n \in L^1$ con $\sup_n \|f_n\|_{L^1} < \infty$ y tales que (1). Muestra que f_n son uniformemente integrables

Problema 10 (Ejercicio 1.5.15 de Tao). Encuentra una sucesión f_n uniformemente integrable que convergen c.t.p. a cero, pero no convergen en medida y no convergen casi uniformemente.

Problema* 1 (Ejercicio 1.5.19 de Tao). Sea $\mu(X) < \infty$. Para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definamos su *función de distribución acumulada* $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, \mu(X)]$ por la formula $F(\lambda) := \mu(\{x \in X : f(x) \leq \lambda\})$. Decimos que $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ *convergen en distribución* a f si las funciones de distribución F_n de f_n convergen puntualmente a la función de distribución F de f en todos sus puntos de continuidad.

1. Muestra que si $f_n \rightarrow f$ c.t.p. o en medida, entonces $f_n \rightarrow f$ en distribución.
2. Encuentra un ejemplo en el cual $f_n \rightarrow f$ en distribución y las f_n no convergen c.t.p. y no convergen en medida.
3. Muestra que si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en distribución entonces no necesariamente $f_n + g_n \rightarrow f + g$ en distribución.
4. Muestra que es posible que $f_n \rightarrow f$ y $f_n \rightarrow g$ en distribución contemporaneamente, mientras que f y g no están iguales c.t.p.

Problema* 2 (la convergencia en medida es metrizable). Para $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible definamos $\rho_n(f) := \mu\{|f| > \frac{1}{n}\}$, y para $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles definamos

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(f - g)}{1 + \rho_n(f - g)}.$$

1. Muestre que $\rho_n(f + g) \leq \rho_{2n}(f) + \rho_{2n}(g)$ y utilice esto para mostrar que $d(f, g)$ es una distancia entre funciones medibles $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$, cocientado por la relación de equivalencia $f \sim g$ si $f = g$ c.t.p.
2. Muestre que $f_n \rightarrow f$ en medida si y solo si $d(f_n, f) \rightarrow 0$.

Problema* 3. Suponemos aquí que $\mu(X) < \infty$.

1. Muestra que si $f_n \rightarrow f$ c.t.p. y vale (1) entonces $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$.
(Pista: Reduce al caso $f_n, f \geq 0$. Prueba $\int_X |f| d\mu < \infty$. Utilice el facto que para cada $\epsilon > 0$, $|f_n - f| > \epsilon$ vale en un conjunto de medida pequeña para n grande.)
2. Muestra que si $f_n, f \in L^1(\mu)$ y $f_n \rightarrow f$ c.t.p. y

$$\forall E \in \mathcal{B}, \quad \int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu$$

entonces vale la propiedad (1).

3. Muestra que la convergencia c.t.p. se puede reemplazar por la convergencia en medida en los puntos precedentes.

Problema* 4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de periodo 1, y suponemos que $f|_{[0,1]} \in L^1([0, 1])$.

- Muestra que para toda $g \in C^0([0, 1])$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) f(nx) dx = \int_0^1 g(x) dx \int_0^1 f(x) dx.$$

- Muestra que si f es acotada entonces lo mismo vale para toda $g \in L^1([0, 1])$ también.

Problema* 5. Sea $\mu(X) < \infty$ y sean $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ con f_n absolutamente integrables y tales que $f_n \rightarrow f$ c.t.p.. Supone que

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty, \mu(E) \rightarrow 0.$$

Muestra que f es absolutamente integrable.

Problema* 6. Construye $f_n \in L^1([0, 1])$ tales que $\|f_n\|_{L^1[0,1]} \leq 1$ y que no son uniformemente integrables en algún conjunto E de medida positiva.