

Tarea 4

Fecha de Entrega: 10 de Abril.

Como se hará siempre en el curso, “medida” sin ulteriores especificaciones significará siempre “medida σ -aditiva”.

Problema 1. Sea X un conjunto a lo mas numerable y $\mathcal{B} = 2^X$. Muestra que cada medida μ sobre $(X, \mathcal{B})$ se puede representar de una unica manera en la forma $\mu = \sum_{x \in X} c_x \delta_x$ con $c_x \in [0, +\infty]$.

Problema 2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio medible y $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ una sub- σ -algebra. Si $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ entonces demuestra que existe una unica función $g \in L^1(X, \mathcal{B}', \mu)$ tal que

$$\forall E \in \mathcal{B}', \quad \int_E g \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Para su curiosidad: Con la notación del problema precedente, si μ es una medida de probabilidad, se denota $g = \mathbb{E}[f|\mathcal{B}']$ y g se llama “esperancia condicional” de f respecto a $\mathcal{B}'$.

Problema 3 (Completamiento de espacios de medida 1).

1. Muestra que el completamiento $(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$ de un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es unico.
2. Muestra que $\overline{\mathcal{B}} = \{A \in 2^X : \exists B, N \in \mathcal{B}, m(N) = 0, B \Delta A \subset N\}$.
3. Muestra que $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}[\mathbb{R}^d], m)$ es el completamiento de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}[\mathbb{R}^d], m)$.

Problema 4 (Completamiento de espacios de medida 2).

Sea $\mathcal{A}$ una algebra Booleana, y μ una medida sobre $\langle \mathcal{A} \rangle$.

1. Muestra que si $\mu(X) < \infty$ entonces para cada $E \in \langle \mathcal{A} \rangle$ y cada $\epsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E \Delta F) < \epsilon$.
2. Sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ y $\mu(A_n) < \infty$ para cada n . Muestra que para cada $E \in \langle \mathcal{A} \rangle$ de medida finita y cada $\epsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E \Delta F) < \epsilon$.

Problema 5 (Fonciones medibles).

1. $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es medible $\Leftrightarrow$ para cada $\lambda > 0$ el sobrenivel $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$ es medible.
2. $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es medible $\Leftrightarrow$ para cada $B \subset \mathbb{C}$ boreliano, $f^{-1}(B)$ es medible.

3. $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es medible $\Leftrightarrow$ las partes reales y imaginarias de f son medibles
4. $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ son medibles y $\forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x)$ entonces f es medible.
5. $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ son medibles entonces $f + g$ y fg son medibles.

Problema 6 (Egorov). Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espacio de medida, $\mu(X) < \infty$ (entonces decimos que se trata de un “espacio de medida finito”). Sean $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles y $\forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x)$. Muestra que por cada $\epsilon > 0$ existe $E \subset X$ medible con $\mu(E) < \epsilon$ y tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en E .

Problema 7 (Pushforward de medidas). Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $(Y, \mathcal{C})$ un espacio medible, $\phi : X \rightarrow Y$ una función tal que $\phi^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ por todo $C \in \mathcal{C}$ (entonces ϕ se llama “morfismo medible”). En este caso definamos la medida pushforward $\phi_{\#}\mu$ de μ por ϕ :

$$\phi_{\#}\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty], \quad \phi_{\#}\mu(E) := \mu(\phi^{-1}(E)) \quad \text{si } E \in \mathcal{C}.$$

Muestra que $\phi_{\#}\mu$ es una medida sobre $\mathcal{C}$, y que para $f : Y \rightarrow [0, +\infty]$ medible vale

$$\int_Y f \, d\phi_{\#}\mu = \int_X (f \circ \phi) d\mu.$$

Problema 8 (Convergencia dominada).

1. Bajo las condiciones del teorema de convergencia dominada, prueba también $\|f_n - f\|_{L^1(X, \mathcal{B}, \mu)} \rightarrow 0$.
2. En el teorema de convergencia dominada, asume, en vez de que $|f_n| < G$ con $G : X \rightarrow [0, +\infty]$ medible tal que $\int_X G d\mu < \infty$, que $|f_n| < G_n$ con $G_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ medibles tales que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X G_n d\mu < +\infty$. Muestra que también en este caso sigue $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$.

Problema 9 (Defecto en el lemma de Fatou). Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ absolutamente integrables con $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ absolutamente integrable. Muestra que

$$\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu - \|f - f_n\|_{L^1(\mu)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Pista: aplica el teorema de convergencia dominada a $\min\{f_n, f\}$.

Remark: El problema precedente implica que la pérdida posible de masa, en caso que en el lemma de Fatou esta una desigualdad stricta, esta acotada por $\|f_n - f\|_{L^1}$.

Problema 10 (Caracterización del integral sin signo). Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $\mathcal{U}(X, \mathcal{B})$ el espacio de las funciones $\mathcal{B}$ -medibles sin signo sobre X . Sea $I : \mathcal{U}(X, \mathcal{B}) \rightarrow [0, +\infty]$ una función que satisface las tres propiedades

1. $I(cf) = cI(f)$ por $f \in \mathcal{U}(X, \mathcal{B}), c \in [0, +\infty]$,

2. $I(f + g) = I(f) + I(g)$ por $f, g \in \mathcal{U}(X, \mathcal{B})$,
3. $I(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$ si $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ son funciones en $\mathcal{U}(X, \mathcal{B})$.

Muestra que entonces existe una medida $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $I(f) = \int_X f d\mu$ para toda $f \in \mathcal{U}(X, \mathcal{B})$. (En particular sigue que $\mu(E) = I(1_E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$.)

Problema* 1.

1. Muestra que lo mismo que en el Problema 1 no vale si X es mas que numerable.
2. Muestra que en el Problema 4 punto (2), la conclusion no vale si X es union mas que numerable de conjuntos medibles de medida finita.

Problema* 2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ conjuntos de medida finita. Muestra que

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \mu \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right).$$

Pista: calcula $\text{Simp} \int_X \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - 1_{A_j}) \right) d\mu$ en dos maneras diferentes.

Remark: Para quien quiera, un proyecto posible para los “Extra topics” podria ser de mirar otras formulas combinatorias que generalizan el metodo de este problema, que aparecen en probabilidades y fisica.

Problema* 3 (Extensión del problema 2). Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Una filtración $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de σ -álgebras de $\mathcal{B}$, osea

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_n \subset \dots \subset \mathcal{B}.$$

Una sucesión de funciones $f_n \in L_1(X, \mathcal{B}_n, \mu)$ tales que

$$\forall E_n \in \mathcal{B}_n, \quad \int_{E_n} f_n d\mu = \int_{E_n} f_{n+1} d\mu,$$

se llama “martingala asociada a la filtración $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ”.

Muestra que valen los resultados siguientes sobre la convergencia de martingalas:

1. Si f_n toman valores en $[0, +\infty]$ y μ -c.t.p. $|f_{n+1} - f_n| \leq M$ por todo n , entonces μ -c.t.p. vale uno de los dos casos: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe finito, (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$.
2. Existe $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ si y solamente si existe $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que

$$\forall n \geq 1, \forall E_n \in \mathcal{B}_n, \quad \int_{E_n} f d\mu = \int_{E_n} f_n d\mu.$$

Problema* 4 (convergencia monotonamente para medidas). Sea $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas sobre un espacio de medida $(X, \mathbb{B})$, tales que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \mathbb{B}$. Muestra que para toda $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ medible, vale

$$\int f \, d\mu_n \rightarrow \int f \, d\mu.$$