

Tarea 3

Fecha de Entrega: 3 de Abril.

Problema 1. Muestre que en el Teorema de Lusin, la hipótesis de que f sea absolutamente integrable se puede reemplazar con una de las siguientes:

1. f localmente integrable (osea $f1_E$ es absolutamente integrable para todo E acotado).
2. f medible y c.t.p. finita.

Problema 2. Demuestre que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es medible si y solamente si es el límite puntual de funciones f_n continuas.

Problema 3. Pruebe que

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces por todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |f(x)| dx \leq \epsilon$.
2. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es medible y $m(\text{spt}(f)) < \infty$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $E \subset \mathbb{R}^d$ medible con $m(E) \leq \epsilon$ tal que f es localmente acotada en $\mathbb{R}^d \setminus E$ (osea que para todo $R > 0$ existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para $x \in B(0, R) \setminus E$).

Problema 4. Pruebe que las siguientes son álgebras booleanas:

1. La clase $\overline{\mathcal{E}[\mathbb{R}^d]}$ de los conjuntos $E \subset \mathbb{R}^d$ tales que E o $\mathbb{R}^d \setminus E$ es elemental.
2. La clase $\overline{\mathcal{J}[\mathbb{R}^d]}$ de los conjuntos $E \subset \mathbb{R}^d$ tales que E o $\mathbb{R}^d \setminus E$ es Jordan-medible.
3. La clase $\mathcal{L}[\mathbb{R}^d]$ de los conjuntos Lebesgue-medibles.
4. La clase $\mathcal{N}[\mathbb{R}^d]$ de los conjuntos $E \subset \mathbb{R}^d$ tales que E o $\mathbb{R}^d \setminus E$ tiene medida de Lebesgue nula.
5. La clase $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ de los conjuntos periódicos de $\mathbb{Z}$. Dicimos que $A \subset \mathbb{Z}$ es periódico si existen $k \in \mathbb{N}$ y $A' \subset \{0, \dots, k\}$ tales que $A = \{kn + m : m \in A', n \in \mathbb{Z}\}$.

¿Cuáles son σ -álgebras y porqué? (¿o porqué no?)

Problema 5. Sea X un conjunto. Si X se puede particionar en conjuntos $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$, entonces la clase $\mathcal{A}((A_\alpha)_{\alpha \in I})$ de todos los conjuntos de la forma $E = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ con $J \subset I$ se llama la *álgebra atómica* con *átomos* $\{A_\alpha\}_\alpha$. Pruebe que:

1. $\mathcal{A}((A_\alpha)_{\alpha \in I})$ es una álgebra booleana.

2. Los átomos no-vacios de una álgebra atómica están únicamente determinados. Entonces $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{A'_\alpha : \alpha \in I'\}$ son dos particiones de X con $\mathcal{A}((A_\alpha)_{\alpha \in I}) = \mathcal{A}((A'_\alpha)_{\alpha \in I'})$ si y solamente si existe una biyección $\phi : I \rightarrow I'$ con $A'_{\phi(\alpha)} = A_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.
3. Toda algebra booleana finita es una algebra atómica, y entonces tiene cardinalidad 2^n .
4. Las algebras del problema 4 no son atómicas.

Problema 6. Pruebe que la algebra $\overline{\mathcal{E}[\mathbb{R}^d]}$ del problema 4 es generada por las cajas de $\mathbb{R}^d$.

Problema 7. Pruebe que si $\mathcal{F}$ es una colección de n conjuntos entonces $\langle \mathcal{F} \rangle_{\text{bool}}$ es una algebra booleana de cardinalidad a lo más 2^{2^n} . Encuentra un ejemplo que pruebe que esta cota superior es optimal.

Problema 8. Pruebe que la σ -algebra de Borel $\mathcal{B}[\mathbb{R}^d]$ se puede obtener de cada una de las maneras siguientes:

$$\mathcal{B}[\mathbb{R}^d] = \langle \{E \subset \mathbb{R}^d : E \text{ cerrado}\} \rangle, \quad (1)$$

$$= \langle \{E \subset \mathbb{R}^d : E \text{ compacto}\} \rangle, \quad (2)$$

$$= \langle \{B(x, r) \subset \mathbb{R}^d : x \in \mathbb{R}^d, r > 0\} \rangle, \quad (3)$$

$$= \langle \{B \subset \mathbb{R}^d : B \text{ caja cerrada}\} \rangle. \quad (4)$$

$$(5)$$

Problema 9. Si $X \neq \emptyset$ es un conjunto, $\mathcal{B}$ una σ -algebra sobre X , y $S \subset X, S \notin \mathcal{B}$, pruebe que:

$$\langle \mathcal{B} \cup \{S\} \rangle = \{(A \cap S) \cup (B \cap S^c) : A, B \in \mathcal{B}\}.$$

Problema 10. Sean X, X' dos conjuntos y $f : X \rightarrow X'$ una función. Demuestre que

1. Si $\mathcal{B}$ es una σ -algebra sobre X entonces $\mathcal{B}' := \{E \subset X' : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}\}$ es una σ -algebra sobre X' .
2. Si $\mathcal{B}'$ es una σ -algebra sobre X' entonces $\mathcal{B} := \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}'\}$ es una σ -algebra sobre X .
3. Para todo $\mathcal{F}$ conjunto de subconjuntos de X' vale $\langle f^{-1}(\mathcal{F}) \rangle = f^{-1}(\langle \mathcal{F} \rangle)$, donde utilizamos la notación $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$.

Problema* 1. Si $\mathcal{F}$ es un conjunto de subconjuntos de X de cardinalidad κ infinita, entonces la cardinalidad de $\langle \mathcal{F} \rangle$ es a lo más $\kappa^{\aleph_0}$.

Problema* 2. En este problema $|\cdot|$ denota la cardinalidad de un conjunto.

Recordemos los siguientes hechos:

- Por definición, $|A| = |B|$ significa que existe una función biyectiva $f : A \rightarrow B$, y $|A| \leq |B|$ significa que existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$.

- $2^A := \{E : E \subset A\}$ es en biyección con el conjunto de todas las funciones $f : A \rightarrow \{0, 1\}$.
- Mas en general se denota $A^B := \{f : B \rightarrow A\}$.
- Para conjuntos finitos vale $|A^B| = |A|^{|B|}$.
- Si κ es un cardinal con $|A| = |\kappa|$ entonces escribemos $|A| = \kappa$.
- $\aleph_0$ denota el primer cardinal infinito.
- Si $\alpha < \beta$ con α, β cardinales, entonces $\beta^\alpha = \beta$.

1. Demuestra que $|2^A| > |A|$ por todo A . Pista: diagonalización de Cantor..
2. Demuestra que $|\mathbb{R}| = |[0, 1]| = |2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$. Pista para la segunda igualdad: expreme numeros en $[0, 1]$ en “bits” en base 2..
3. El conjunto de Cantor tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.
4. Recordamos que $C^0(\mathbb{R})$ son las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Demuestra que la cardinalidad de $|C^0(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$. Pista: Recuerda que $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$. Entonces la desigualdad “ $\leq$ ” necesita de asociar a cada $r \in \mathbb{R}$ una función continua, de manera inyectiva. Para “ $\geq$ ” observa que $f|_{\mathbb{Q}}$ determina toda f , si f es continua, y recuerda que $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (¿Porqué?).

Problema* 3. 1. Si $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ son los abiertos de $\mathbb{R}^d$, entonces $|\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)| = 2^{\aleph_0}$.

2. Si $2 \leq |A| \leq 2^{2^{\aleph_0}}$, entonces $|A^{\mathbb{R}}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

(Lo que implica que $|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |(2^{\mathbb{R}})^{\mathbb{R}}| = 2^{2^{\aleph_0}}$)

3. Las funciones discontinuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ forman un conjunto de cardinalidad $2^{2^{\aleph_0}}$.

Pista: utiliza la construcción del conjunto de Cantor.

Para su curiosidad: La siguiente pregunta es indecidible (pero intentar de demostrarla puede ser instructivo):

¿Es cierto que $|2^A| = |2^B|$ implica $|A| = |B|$?