

Tarea 2

Fecha de Entrega: 25 de Marzo, en modulo de ayudantía.

En esta tarea, “medible” significa siempre “Lebesgue-medible”, y $m(\cdot)$ es la medida de Lebesgue. Es suficiente con hacer ≥ 10 problemas.

Problema 1. Muestre que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es una función simple si y solamente si es medible y toma un número finito de valores.

Problema 2. Muestre que si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ es medible, entonces $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leq t \leq f(x)\}$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Problema 3. Muestre que:

1. Cada función continua $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ es medible.
2. Si $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ son funciones con f medible y $f = g$ en casi todo punto, entonces g es medible.
3. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ las funciones $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ son medibles, entonces las funciones $x \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, $x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, $x \mapsto \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ y $x \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, son medibles.
4. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ es medible y $\varphi : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ es continua, entonces $\phi \circ f$ es medible.

Problema 4. Demuestre que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ es medible y acotada, si y solamente si existen funciones $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ acotadas, tales que f es el límite uniforme de f_n .

Problema 5. 1. Si E es un conjunto medible, muestre que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) 1_E(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) 1_{\mathbb{R}^d \setminus E}(x) dx.$$

2. Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \min\{f(x), n\} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

¿Vale lo mismo con $\overline{\int_{\mathbb{R}^d}}$ en vez de $\int_{\mathbb{R}^d}$?

3. Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) 1_{B(0, n)}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

¿Vale lo mismo con $\overline{\int_{\mathbb{R}^d}}$ en vez de $\int_{\mathbb{R}^d}$?

4. Si $f + g \in \text{Simp}^+(\mathbb{R}^d)$ es una función acotada y con soporte de medida finita, muestre que:

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx.$$

Problema 6. Si f es medible y acotada, con $m(\text{spt}(f)) < \infty$, demuestre que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx}$. ¿Vale lo mismo si f no es acotada, o si $m(\text{spt}(f)) = +\infty$?

Problema 7. Muestre que para $E \subset \mathbb{R}^d$ arbitrario se tiene que $\overline{\int_{\mathbb{R}^d} 1_E(x) dx} = m^*(E)$. Concluya que $\overline{\int_{\mathbb{R}^d} (\cdot)}$ no es aditivo para f en general.

Problema 8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable. Muestre que si extendemos f a $\mathbb{R}$ definiendo $f(x) = 0$ para $x \notin [a, b]$, entonces f es medible, y la integral según Riemann $\int_a^b f(x) dx$ es igual a la integral según Lebesgue de la extensión así definida.

Problema 9. Muestre que si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ es medible, entonces para cada $y \in \mathbb{R}^d$ la función $g(x) := f(x + y)$ es medible y su integral es igual a la integral de f .

Problema 10. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$, y considera la norma euclidiana $\|(y_1, \dots, y_n)\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}$ sobre $\mathbb{R}^n$. Escriba la definición de que f es medible, generalizando la definición vista en clase. Demuestre que f es medible si y solamente si cada coordenada es medible, y muestre que:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \right\| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\| dx.$$

Problema* 1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^d$ medibles y sea $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

1. Muestre que si A, B son abiertos, entonces $A + B$ es abierto.
2. Muestre que si A, B son cerrados, entonces $A + B$ es medible.
3. Encuentre A, B cerrados tales que $A + B$ no es cerrado.
4. Encuentre A, B cerrados con $m(A) = m(B) = 0$ y con $m(A + B) > 0$. (*Pista:* En $\mathbb{R}$ considere $A = \mathcal{C}$ (el conjunto de Cantor) y $B = \mathcal{C}/2$, y demuestre que $A + B \supset [0, 1]$. En $\mathbb{R}^2$ observe que es mucho más sencillo tomando $A = [0, 1] \times \{0\}$ y $B = \{0\} \times [0, 1]$, éstos entregan $A + B = [0, 1] \times [0, 1]$)

Problema* 2. 1. Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible con $m(E) > 0$, muestre que por cada $\alpha \in (0, 1)$ existe un intervalo abierto I tal que $m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$. (*Pista:* encuentre un abierto $U \supset E$ con $m(E) \geq \alpha m(U)$, y escriba U como unión de intervalos abiertos disjuntos. Luego muestre que la propiedad vale para al menos uno de estos intervalos).

2. Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible con $m(E) > 0$ muestre que $E - E := \{e - e' : e, e' \in E\}$ contiene un intervalo abierto con centro 0. (*Pista:* Utilizando el punto anterior, existe I intervalo tal que $m(E \cap I) > \frac{9}{10} m(I)$. Si $E_0 - E_0$ con $E_0 := E \cap I$ no contiene un intervalo abierto con centro 0, entonces para $\epsilon > 0$ arbitrariamente

pequeño, $E_0 \cap (E_0 + \epsilon) = \emptyset$ y $E_0 \cup (E_0 + \epsilon) \subset I \cup (I + \epsilon)$. Ahora para $\epsilon < |I|$ vale $m(I \cup (I + \epsilon)) = |I| + \epsilon$, lo que junto con $m(E_0 \cup (E_0 + \epsilon)) = 2m(E_0)$ da una contradicción para $\epsilon > 0$ pequeño.

3. Muestre que si $E, F \subset \mathbb{R}$ son medibles y $m(E) > 0, m(F) > 0$, entonces $E + F$ contiene un intervalo.

Problema* 3. Considere la curva $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = f(x)\}$, donde f tiene derivadas f', f'' continuas en $[0, 1]$. Muestre que $m(\Gamma + \Gamma) > 0$ si y solo si $\Gamma + \Gamma$ contiene un abierto, si y solo si f no es lineal (o sea que no es de la forma $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$).

Problema* 4. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ medible y sea $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una aplicación lineal invertible (entonces $T(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ una matriz invertible). Muestre que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(T^{-1}(x)) dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx,$$

o equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax) dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Pista: Para demostrar esto, muestre inicialmente que $m(T(E)) = |\det A| m(E)$ para cada $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Para demostrar esto, podría ser útil considerar el caso de A diagonal y el caso de A ortogonal, y basarse en la demostración sobre la unicidad de la medida de Lebesgue. Es suficiente considerar solamente E como una caja en el primer caso y E como una bola en el segundo caso (¿por qué?). El caso de A general considere decomposición polar y los puntos anteriores (¿por qué?).