

Tarea 13

Problema 1 (Espacios uniformemente convexos).

Definición: un espacio de Banach L es *uniformemente convexo* si para todas sucesiones $x_n, y_n \in L$ con $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ para todo n , si vale $\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\| \rightarrow 1$ entonces vale $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

- Muestra que ℓ_2 es uniformemente convexo.
- Muestra que ℓ_1 no es uniformemente convexo.
- Muestra que si L uniformemente convexo y $A \subset L$ es cerrado y convexo, entonces existe y es unico el elemento de A de norma minima.

Problema 2.

Muestra que las tres familias de seminormas siguientes engendran la misma topologia sobre $C_0^\infty([0, 1])$:

- $p_n^\infty(f) := \sup_{x \in (0,1)} |f^{(n)}(x)|$, $n \in \mathbb{N}$,
- $p_n^1(f) := \int_0^1 |f^{(n)}(x)| dx$, $n \in \mathbb{N}$,
- $p_n^2(f) := \|f^{(n)}\|_{L^2(0,1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema 3 (KG 378).

Encuentra los puntos extremales de las bolas unitarias en c y c_0 (para sus definiciones, ver tarea precedente), y muestra que ni c ni c_0 es el espacio dual de un EVT normato. (Pista: Banach-Alaoglu + Krein-Milman)

Problema 4 (KG 380).

Definimos las matrices doblemente estocasticas de dimension n por

$$S_n := \left\{ M = (M_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n} : M_{ij} \geq 0, \forall j \sum_i M_{ij} = 1, \forall i \sum_j M_{ij} = 1 \right\}.$$

Encuentra los puntos extremales de S_n .

Problema 5 (KG 449).

Sea X un localmente compacto Hausdorff. Muestra que las medidas $\pm \delta_x$ con $x \in X$ son los puntos extremales de la bola unitaria de $(C(X))'$.

Problema 6 (KG 452).

Definiciones: Un espacio X es conexo por arcos si para cada $x, y \in X$ existe $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua con $f(0) = x, f(1) = y$. Un espacio es localmente conexo por arcos si para cada $x \in X$ y para cada U entorno abierto de x existe $V \subset U$ entorno abierto de x conexo por arcos.

Sea X un espacio metrico localmente conexo por arcos. Construye una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua suryectiva.

Problema 7 (KG 465).

Muestra que si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $C^\infty(\Omega)$.

Problema 8 (KG 471).

Muestra que la operación de diferenciación $\partial/\partial x_i$ y la operación de multiplicación por x_i son operadores continuos sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Problema 9 (KG 475 parte (a)).

Sea $G(\mathbb{R}^2)$ el subespacio de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ que consiste en las funciones ϕ tales que

$$\phi(x + m, y + n) = e^{2\pi i m y} \phi(x, y), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Muestra que el operador A definido por

$$Af(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + k) e^{-2\pi i k y}$$

envia cada función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $G(\mathbb{R}^2)$.

Problema 10 (KG 487).

- Muestra que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f \phi$ es un elemento de $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$.
- si $f_\epsilon(x) := \epsilon^{-1} f(x/\epsilon)$ entonces el limite

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon$$

existe en $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ y es representado por una delta de Dirac $\phi \mapsto \phi(0)$.

- Muestra que en $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ vale

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta_0.$$

Problema 11 (KG 503 punto (a)).

- Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces muestra que la siguiente formula define un funcional de $(C_0^\infty(\mathbb{R}^2))'$:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad F_c \left(\int_{f \leq c} \phi(x, y) dx dy \right).$$

- Muestra que si

$$\frac{dF_c}{dc} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_{c+\epsilon} - F_c}{\epsilon}$$

existe entonces da un funcional en $(C_0^\infty(\mathbb{R}^2))'$ que se anula sobre ϕ si $\phi = 0$ sobre el conjunto $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$.