

Tarea 12

Fecha de Entrega: 12 de Junio.

Para obtener el puntaje máximo será suficiente entregar la solución de al menos 5 problemas.

Notaciones:

- KG= libro de Kirillov-Gvisiani
- EVT= espacio vectorial topológico
- $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- c = espacio de las sucesiones $\{x_n\}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existe, con la norma $\|\{x_n\}\| := \sup_n |x_n|$.
- $c_0 \subset c$ = el espacio de las sucesiones que convergen a 0.
- Si L normado y con $p \in [1, \infty)$, entonces $\ell_p(L)$ es el espacio de las sucesiones $\{x_n\}$ con $x_n \in L$, y con norma $\|x_n\|_{\ell_p(L)} := (\sum_n \|x_n\|_L^p)^{1/p}$ finita.
- $\ell_\infty(L)$ = espacio de las sucesiones $\{x_n\}$ con $x_n \in L$, con norma $\|x_n\|_{\ell_\infty(L)} := \sup_n \|x_n\|_L$ finita.
- $B(\mathbb{R}^n)$ = espacio de las funciones acotadas sobre $\mathbb{R}^n$, con norma $\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.
- $C([0, 1])$ = el espacio de las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, con la norma $\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

Problema 1 (KG 279+288).

1. Si L es un EVT de dimensión infinita, muestra que existe $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y no continua.
2. Encuentra L EVT donde la topología débil y la topología fuerte no coinciden.

Problema 2 (KG 293+289).

1. Muestra que los duales c' y c'_0 son isomorfos a $\ell_1(\mathbb{R})$, pero que c y c_0 no son isomorfos.
2. Muestra que en $\ell_1(\mathbb{R})$ topologías débil y fuerte coinciden.

Problema 3 (KG 294+295+297).

1. Muestra que $\ell_p(K)' = \ell_q(K)$ si $p \in (1, \infty)$ y $q = p/(p-1)$.

2. Muestra que $\ell_\infty(K)'$ no es isomorfo a $\ell_1(K)$.
3. Muestra que $C([0, 1])$ no se inyecta isometricamente (osea conservando la norma) en $\ell_p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$, y que se inyecta isometricamente en $\ell_\infty(\mathbb{R})$.

Problema 4 (KG 300+321).

- Si L_1, L_2 son EVT de dimension finita entonces $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ son todos los operadores lineales (osea, son automaticamente continuos), y que entonces $\dim(\mathcal{L}(L_1, L_2)) = \dim(L_1)\dim(L_2)$.
- El resultado del punto precedente no vale en dimension infinita, en general: Sobre $C([0, 1])$ define una topologia tomando como base de entornos de 0 los $U_\epsilon := \{f \in C([0, 1]) : \int_0^1 \sqrt{|f(x)|} dx < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$. Sea L el EVT obtenido Muestra que $L' = \{0\}$.

Problema 5 (KG 301+302).

- Sea P el espacio de todos los polinomios en x con coeficientes reales y sean U_+ (resp. U_-) los polinomios con coeficiente principal positivo (resp. negativo). Muestra que U_+, U_- son convexos pero no pueden ser separados por un hiperplano.
- Muestra que si A, B son convexos disjuntos, ellos pueden ser separados estrictamente por un hiperplano (osea existe $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ y existen $c_1 < c_2$ con $f(x) \leq c_1$ en A y $f(x) \geq c_2$ en B), si almenos uno de ellos es compacto.

Problema 6 (KG 306). Sea L un EVT sobre $\mathbb{R}$ normato. Muestra que existe un funcional lineal f de norma ≤ 1 tal que $f(x_j) = c_j$ para $j = 1, \dots, n$ si y solo si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$|\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n| \leq \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|.$$

Problema 7 (KG 309+313). Muestra que existe un funcional lineal $LIM \in \ell_\infty(\mathbb{R})'$ tal que

- $\sup_n x_n \geq LIM\{x_n\} \geq \inf_n x_n$,
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existe y es igual a a , entonces $LIM\{x_n\} = a$,
- $LIM\{x_{n+1}\} = LIM\{x_n\}$.

Similmente, muestra que existe $LIM \in B(\mathbb{R}^n)'$ tal que

- $\sup_{\mathbb{R}^n} f(x) \geq LIM f(x) \geq \inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$,
- Si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)$ existe y es igual a a , entonces $LIM f(x) = a$,
- $LIM f(x + y) = LIM f(x)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Problema 8 (KG 318). Sea $I^N := [0, 1]^N \subset \mathbb{R}^N$. Muestra que cada conjunto acotado convexo $A \subset \mathbb{R}^2$ puede ser aproximado con error arbitrariamente pequeño por secciones 2-dimensionales de un I^N .

Osea, muestra que para cada $\epsilon > 0$ existe N y existe una $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ lineal tal que si $B := \phi^{-1}(I^N)$ entonces vale

$$(1 - \epsilon)p_B \leq p_A \leq (1 + \epsilon)p_B,$$

donde p_U es la funcional de Minkowski de U .

Problema 9 (KG 319). Construye una isometria (osea una funcion que preserva la norma) de $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ en $C([0, 1])$ para todo $p \in [1, \infty]$.

Problema 10 (KG 322). Si L EVT, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida y $f : X \rightarrow L$ una función, entonces f se dice *debilmente medible* si $F(f(x))$ es medible para todo $F \in L'$. Un elemento $\phi \in L$ se llama en este caso *integral debil* de f respecto a μ si $F(\phi) = \int_X F(f(x))d\mu(x)$ para todo $F \in L'$. Muestra que

- Si un integral debil de f existe, entonces es unico.
- Si L es un espacio de Banach reflexivo y $x \mapsto \|f(x)\|$ es integrable, entonces muestra que existe el interal debil de f .