

Tarea 11

Fecha de Entrega: 05 de Junio (en el casillero de Mircea Petrache a la entrada).

Para obtener el puntaje máximo será suficiente entregar la solución de al menos 5 problemas.

Problema 1. 1. Muestra que cada espacio metrico es normal.

2. Si $\mathcal{F}$ es la topologia usual sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{F}'$ esta engendrada por $\mathcal{F} \cup \{\{q\} : q \in \mathbb{Q}\}$, entonces muestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{F}')$ es Hausdorff, $\{x\}$ es cerrado para esta topologia para todo $x \in \mathbb{R}$, pero este espacio no es normal.

Problema 2. Sea X localmente compacto Hausdorff, $K \subset U \subset X$ con K compacto y U abierto. Muestra que existe $f \in C_c(X)$ con $1_K \leq f \leq 1_U$. (ver pista del ejercicio 1.10.6 de Tao).

Problema 3. Sea X espacio metrico, $K \subset X$ compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es C -Lipschitz (osea para todos $x, y \in K$ vale $|f(x) - f(y)| < Cd(x, y)$). Muestra que existe una extensión $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ que todavia es C -Lipschitz. (ver pista del ejercicio 1.10.6 de Tao).

Problema 4. Sea X normal, $K \subset X$ compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Muestra que existe $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ extensión continua de f . (ver pista del ejercicio 1.10.9 de Tao).

Problema 5. Enuncia y demuestra (ocupando la versión hecha en clase) la versión con signo del teorema de representación de Riesz para funcionales sobre $C_c(X)$ para X localmente compacto Hausdorff σ -compacto.

Problema 6. Considerando el espacio $M(X)$ de las medidas de Radon con signo sobre X ,

1. Muestra que $p(\mu) := |\mu|(X)$ es una norma sobre $M(X)$ (donde $|\mu|$ es la variación total de μ).
2. Muestra que $(M(X), p)$ es un espacio de Banach.
3. Muestra que $(M(X), p)$ es el espacio dual del espacio $(C_c(X), \bar{p})$, donde $\bar{p}(f) := \max_{x \in X} |f(x)|$.

Problema 7 (265 de Kirillov-Gvishiani). Sea L un espacio lineal sobre K . Muestra que entre las topologias Hausdorff sobre L que hacen de L un espacio localmente convexo, existe la topologia “mas fuerte” (osea la con más abiertos). Esta se llama la “convex core topology”, y tiene las dos propiedades siguientes

1. cada funcional linear (osea cada $f : L \rightarrow K$ lineal) es continua

2. una base de entornos de 0 en L es formada por todos los convexos que contienen 0 y que intersectan cada linea pasante por 0 en un intervalo de largo positivo.

Problema 8 (267-268 de Kirillov-Gvishiani). Muestra que entre todos los convexos $B \ni 0$ cuyo funcional de Minkowski es p , existe el mas pequeño B_0 y el mas grande B_1 (osea por cada otro tal B vale $B_0 \subset B \subset B_1$). Muestra que B_1 es el cierre de B_0 en la “convex core topology”.

Problema 9 (270 de Kirillov-Gvishiani). Si L espacio topologico vectorial, entonces $M \subset L$ se llama “acotado” cuando para todo entorno U de 0 existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon M \subset U$. Muestra que si L es espacio polinormato $(L, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$ entonces un conjunto $M \subset L$ es acotado si y solo si es acotado respecto a cada seminorma $p_\alpha, \alpha \in A$.

Problema 10 (271 de Kirillov-Gvishiani). Muestra que en un espacio vectorial topologico localmente convexo, la envlopa convexa de (osea el convexo mas pequeño que contiene) un conjunto acotado (ver problema precedente para definición de acotado) es acotada. Muestra con un ejemplo que esto no vale para un espacio vectorial topologico arbitrario.

Problema 11 (276 de Kirillov-Gvishiani). Muestra que el espacio vectorial topologico $\mathbb{R}^\infty$ de las sucesiones de numeros reales, con la distancia

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

es

1. localmente convexo,
2. numerabilmente normable,
3. no normable.