

Tarea 10

Fecha de Entrega: 22 de Mayo.

Para obtener el puntaje máximo será suficiente entregar la solución de al menos 5 problemas. Para los problemas provenientes de las notas de Tao, ver Tao para pistas.

Problema 1 (Ejercicios 1.7.1, 1.7.2 de Tao).

1. Si E es un conjunto nulo por una medida exterior μ^* , muestra que E es Caratheodory-medible.
2. Muestra que $E \subset \mathbb{R}^d$ es Caratheodory-medible respecto a la medida exterior de Lebesgue si y solo si E es Lebesgue-medible.

Problema 2 (Ejercicios 1.7.4 y 1.7.6 de Tao).

1. Muestra que en la definición de pre-medida, se puede asumir $\mu_0(\emptyset) = 0$ en vez que μ_0 finitamente aditiva, obteniendo una definición equivalente.
2. Muestra que en la definición de pre-medida se puede asumir μ_0 numerabilmente subaditiva en vez que numerabilmente aditiva, obteniendo una definición equivalente.
3. Muestra con un contraejemplo que si tuvieramos *a la vez los dos* cambios precedentes, no obtendríamos una definición equivalente.
4. Encuentra una medida finitamente aditiva $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ que no es una pre-medida.

Problema 3 (Ejercicios 1.7.7 y 1.7.8 de Tao).

1. Si $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ es una pre-medida σ -finita, $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ es la extensión de Hahn-Kolmogorov de μ_0 y $\mu' : \mathcal{B}' \rightarrow [0, +\infty]$ es una otra medida numerabilmente aditiva que extiende μ_0 , muestra que $\mu = \mu'$ sobre $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$.
2. Muestra que sin la hipótesis que μ_0 es σ -aditiva, la unicidad descrita en el punto precedente no vale. (ver Tao para pista)

Problema 4 (Partes de los Ejercicios 1.7.18 y 1.7.19 de Tao).

1. Si $E \subset \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ entonces muestra que los conjuntos $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ para $x \in X$ están en $\mathcal{B}_Y$.
2. Muestra que si $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ es medible respecto a $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ entonces $f_x : y \mapsto f(x, y)$ es $\mathcal{B}_Y$ -medible para cada $x \in X$.

3. Muestra que el producto de dos σ -álgebras de Lebesgue no es una σ -álgebra de Lebesgue (Pista: ocupa el punto 1).
4. Muestra que la σ -álgebra de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^{d+d'}$ es el completamiento del producto de σ -álgebras de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$ y sobre $\mathbb{R}^{d'}$ respectivamente.

Problema 5 (Ejercicio 1.7.22 de Tao). Muestra que la unicidad en el teorema de Tonelli no esta cierto sin la hipótesis de σ -finitude sobre las medidas. (ver pista en Tao)

Problema 6 (Ejercicio 3.10.40 de Bogachev). Sea $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$. Muestra que T tiene medida 0 pero intersecta cada conjunto de la forma $A \times B$ con A, B conjuntos de medida positiva en $[0, 1]$. (Pista: usa el hecho que $A - B$ contiene un intervalo)

Problema 7 (Ejercicio 3.10.38 y 3.10.43 de Bogachev). Sean $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ espacios medibles.

1. Muestra que cada conjunto de $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ es contenido en una σ -álgebra engendrada por conjuntos $A_n \times B_n$ para dos familias a lo más numerables $\{A_n\} \subset \mathcal{B}_X$ y $\{B_n\} \subset \mathcal{B}_Y$.
2. Muestra que para todo $E \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ la familia de las secciones $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ contiene a lo más $2^{\aleph_0}$ conjuntos distintos.

Problema 8 (Ejercicio 3.10.53 de Bogachev). Sean $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ espacios medibles y $f : X \rightarrow Y$ una función. Muestra que en general ninguna de las dos implicaciones abajo vale:

Existe f que es medible entre $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ $\Leftrightarrow \Rightarrow$ El grafico $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ es $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ -medible.

Problema 9 (Ejercicio 3.10.82 de Bogachev). Sea σ_{n-1} la medida definida sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, asignando a $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ el valor

$$\sigma_{n-1}(E) := nm \left(\left\{ x \in B(0, 1) \setminus \{0\} : \frac{x}{|x|} \in E \right\} \right).$$

1. Muestra que σ_{n-1} es la única medida de Borel sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ que satisface

$$r^{n-1} dr \times \sigma_{n-1} = \mathcal{L}^n \circ \Phi^{-1},$$

donde $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ es dada por $\Phi(x) = (|x|, x/|x|)$. (Pista: verifica la igualdad sobre una familia de conjuntos que engendra los borelianos y que facilita los calculos.)

2. Muestra que para toda función f medible sobre $\mathbb{R}^n$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} f(ry) d\sigma(y) dr.$$

Problema 10 (Medida de Hausdorff). Sea X un espacio metrico, $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X y $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ una función sobre $\mathcal{F}$, y suponemos que

- para todo $\delta > 0$ se puede cubrir X por una subfamilia numerable de $\mathcal{F}$ formada por conjuntos de diametro a lo más δ ,
- para todo $\delta > 0$ existe $E \in \mathcal{F}$ con $\zeta(E) \leq \delta$ y diametro de E menor o igual a δ .

Definamos para $0 < \delta \leq \infty$ y $A \subset X$,

$$\psi_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \zeta(E_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \text{diam}(E_i) \leq \delta, E_i \in \mathcal{F} \right\}.$$

Sea tambien

$$\psi(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \psi_\delta(A).$$

1. Para $\delta > 0$ fijo, muestra que ψ_δ es una medida exterior.
2. Muestra que en general para $\delta > 0$ ψ_δ no es una medida.
3. Muestra que ψ es una medida de Borel.
4. Sea $0 \leq s < \infty$. Muestra que si X es separable, $\mathcal{F} = 2^X$ y definimos $\zeta(E) = \text{diam}(E)^s$, entonces las hipoteses son verificadas. Lo que obtenemos se llama *la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ sobre X de dimensión s* .
5. Muestra que para una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ la medida $\mathcal{H}^1(\gamma) = \ell(\gamma)$ mide el largo de γ , que es definido por

$$\ell(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) : 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(en general para $k \in \mathbb{N}$ la medida $\mathcal{H}^k$ es proporcional a la medida de volumen k -dimensional, en el caso que $X = \mathbb{R}^n$ o X sea una variedad Riemanniana).