

Tarea I

Fecha de Entrega: 18 de Marzo, en modulo de ayudantía.

Como en las clases, m se refiere a la medida de Lebesgue, m^* a la medida exterior de Lebesgue y $m^{*,(J)}, m_{*,(J)}$ son las medidas exterior y interior de Jordan.

Problema 1. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto elemental. Demuestra que

$$|E| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \# \left(E \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^d \right).$$

De un ejemplo de un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tal que el limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \left(E \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z} \right)$ no existe.

Problema 2 (Unicidad de la medida elemental). Sea $d \geq 1$. Sea $m' : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de la colección de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos elementales de $\mathbb{R}^d$ a los reales no negativos de tal forma que:

- m' es no negativa
- m' es finita aditiva
- m' es invariante bajo traslaciones.

Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $m'(E) = cm(E)$ para todo conjunto elemental E .

Problema 3 (Caracterización de la medida de Jordan). Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ acotado. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1) E es Jordan medible.
- (2) Para todo $\varepsilon > 0$, existen conjuntos elementales $A \subset E \subset B$ tal que $m(B \setminus A) \leq \varepsilon$.
- (3) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto elemental A tal que $m^{*,(J)}(A \Delta E) \leq \varepsilon$.
- (4) $m^{*,(J)}(\partial E) = 0$.

Problema 4. Demuestre que el *cuadrado lleno de balas* $[0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, y el conjunto de balas $[0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ ambos tienen medida de Jordan interior cero y medida de Jordan exterior cero. Concluya que ambos no son Jordan medibles.

Problema 5 (Interpretación de área de la Integral de Riemann).

- (1) Sea $B \subset \mathbb{R}^d$ una caja cerrada, $f : B \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continua. Demuestra que el conjunto

$$\{(x, t) : x \in B, 0 \leq t \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

es Jordan-medible.

- (2) Sea $[a, b]$ un intervalo, y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Demuestre que f es Riemann integrable si y solo si los conjuntos $E_+ = \{(x, t) : x \in [a, b] : 0 \leq t \leq f(x)\}$ y $E_- = \{(x, t) : x \in [a, b] : f(x) \leq t \leq 0\}$ son ambos Jordan medibles en $\mathbb{R}^2$; y en ese caso uno tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = m^2(E_+) - m^2(E_-)$$

Problema 6. Demuestre que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada no puede ser Riemann Integrable.

Problema 7. Encuentra una función Darboux-integrable que no es Riemann-integrable.

Problema 8. De un ejemplo de una secuencia de funciones uniformemente acotadas y Riemann integrables $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, con $n = 1, 2, \dots$ de modo que converge a una función acotada $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que no es Riemann integrable. Qué ocurre si reemplazamos convergencia puntual por convergencia uniforme?

Problema 9 (Consistency check).

- (1) Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es la unión numerable de cajas disjuntas, entonces la medida de Lebesgue exterior de E es igual a su medida de Jordan interior $m^*(E) = m_{*,(J)}(E)$.
- (2) Si $U \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto acotado entonces U es Lebesgue-medible y satisface $m(U) = m_{*,(J)}(U)$.
- (3) Si $K \subset \mathbb{R}^d$ es compacto entonces K es Lebesgue-medible y satisface $m(K) = m^{*,(J)}(K)$.

Problema 10. Demuestra que todo conjunto Jordan-medible $E \subset \mathbb{R}^d$ es Lebesgue-medible.

Problema 11. De un ejemplo para probar que la siguiente igualdad es falsa en general:

$$m^*(E) = \sup \{m^*(U) : U \text{ abierto}\}.$$

Problemas extra

Problema* 1 (Valuaciones en 2 dimensiones). Sea $\mathcal{PK}_2$ el espacio de los poligonos convexos $P \subset \mathbb{R}^2$ (incluyendo como casos degenerados, $P = \emptyset$ y P igual a un punto o a un segmento). Definamos tres funciones $\mu_0, \mu_1, \mu_2 : \mathcal{PK}_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, donde

- $\mu_0(P) = 1$ si $P \neq \emptyset$ y $\mu_0(\emptyset) = 0$.
- $\mu_1(P)$ es el largo del perimetro de P si P es un poligono no degenerado, el largo de P si P es un segmento, o $\mu_1(P) = 0$ si P es un punto o el conjunto vacio.
- $\mu_2(P)$ es el área de P .

Prueba que si $P, Q, P \cup Q \in \mathcal{PK}_2$, entonces vale para $\alpha = 0, 1, 2$

$$\mu_\alpha(P \cup Q) + \mu_\alpha(P \cap Q) = \mu_\alpha(P) + \mu_\alpha(Q)$$

y deduce que si $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{PK}_2$ y $P_1 \cup \dots \cup P_n \in \mathcal{PK}_2$ entonces vale el principio de inclusión-exclusión

$$\mu_\alpha(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n) = \sum_i \mu_\alpha(P_i) - \sum_{i < j} \mu_\alpha(P_i \cap P_j) + \sum_{i < j < k} \mu_\alpha(P_i \cap P_j \cap P_k) + \dots$$

Muestra que μ_0, μ_1 no se extienden a funciones finitamente aditivas sobre el espacio $\mathcal{P}_2$ de todos los poligonos de $\mathbb{R}^2$, mientras que μ_2 tiene una unica extension aditiva a $\mathcal{P}_2$.

Problema* 2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-medible y tal que para todos $a < b \in \mathbb{R}$

$$m(A \cap (a, b)) \leq \frac{b - a}{2}.$$

Pruebe que $m(A) = 0$.

Problema* 3. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Prueba que existe un conjunto E' Lebesgue-medible tal que $E \subset E' \subset \mathbb{R}^d$, $m(E') = m^*(E)$.