

Decomposición y diferenciación de medidas

Medidas con signo

Definición (Medidas con signo) Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida. Una función $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se llama medida con signo sobre $(X, \mathcal{B})$ si

1. $\nu(\emptyset) = 0$,
2. $\nu(E)$ toma a lo más uno de los valores $\pm\infty$,
3. si $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos, $j \in \mathbb{N}$, entonces vale

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j). \quad (1)$$

Observaciones:

1. La propiedad (1) implica que la suma $\sum_j \nu(A_j)$ converge, y a causa del facto que $\bigcup_j A_j$ es un conjunto que no depende del orden en el cual tomamos los A_j , esto implica que la suma *converge absolutamente*.
2. Si existe $B \subset A$ con $\nu(B) = +\infty$ (respectivamente $\nu(B) = -\infty$) entonces sigue de la propiedad 2 de la definición que también $\nu(A) = \nu(X) = +\infty$ (resp. $= -\infty$).

Ejemplos:

- Si μ_1, μ_2 son medidas positivas, a lo más una de las cuales es finita, entonces $\mu := \mu_1 - \mu_2$ es una medida con signo.
- Si μ es una medida positiva sobre $(X, \mathcal{B})$ y si $f \in L^1(\mu)$, entonces la formula

$$\nu_f(A) := \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{B}.$$

(Y si además $f_{\pm}$ es la parte positiva/negativa de f entonces $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es una decomposición cómo en el punto anteriór.)

Teorema de Hahn

Definición Sea ν una medida con signo sobre X . Decimos que un conjunto $A \subset X$ medible es

1. positivo si para todo $B \subset A$ medible vale $\nu(B) \geq 0$,
2. negativo si para todo $B \subset A$ medible vale $\nu(B) \leq 0$,
3. nulo si para todo $B \subset A$ medible vale $\nu(B) = 0$.

Observación: En general $\nu(A) > 0$ no implica que A es un conjunto positivo, a causa de posibles cancelaciones (y similmemente para conjuntos negativos y nulos), lo que es diferente del caso de medidas positivas.

Pero vale el siguiente lemma:

Lemma 1. Si ν es una medida con signo sobre X y para un $A \subset X$ vale $0 < \nu(A) < \infty$ entonces

Existe $P \subset A$ positivo, con $\nu(P) > 0$.

Proof. Definamos

$$\delta_1 := \inf \{ \nu(E) : E \subset A \text{ medible} \},$$

y sea $A_1 \subset A$ medible tal que

$$\begin{cases} \delta_1 \leq \nu(A_1) \leq \frac{\delta_1}{2} & \text{si } \delta_1 > -\infty, \\ \nu(A_1) < -1 & \text{si } \delta_1 = -\infty. \end{cases}$$

Observamos que si $\delta_1 = -\infty$ entonces el infimum no es realizado (si fuera realizado, osea $\nu(B) = -\infty$ con $B \subset A$ medible, habriamos $\nu(A) = -\infty$ por la observación que sigue la definición de medida con signo), y entonces existe A_1 cómo arriba.

Continuamos definiendo

$$\delta_{j+1} := \inf \left\{ \nu(E) : E \subset A \setminus \bigcup_{k=1}^j A_k \text{ medible} \right\}, \quad A_{j+1} \subset A \setminus \bigcup_{k=1}^j A_k \text{ tal que } \begin{cases} \delta_{j+1} \leq \nu(A_{j+1}) \leq \frac{\delta_{j+1}}{2} \\ \nu(A_{j+1}) < -1 \end{cases}$$

Considerando la unión (que es disjunta!) de los A_j , vale

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) > -\infty,$$

y entonces esta suma converge, lo que significa que $\delta_j = -\infty$ para a lo más un numero finito de j y que

$$\delta_j \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Definamos entonces el conjunto $P := A \setminus B$, y verificamos que satisface las propiedades requeridas:

- P es positivo: si $E \subset P$ medible, entonces para todo $j \in \mathbb{N}$ vale $E \subset A \setminus \bigcup_{k=1}^j A_k$ y esto significa que $\nu(E) \geq \delta_j$ para todo j , y que entonces $\nu(E) \geq 0$. Esto vale para todo $E \subset P$ medible, y entonces P es positivo.
- $\nu(P) > 0$: siendo que $\emptyset$ es un competidor en la minimización δ_j y que entonces $\delta_j \leq 0$, vale $\nu(A_k) \leq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y entonces $\nu(B) \leq 0$, y entonces $\nu(P) = \nu(A) \setminus \nu(B) \geq \nu(A) > 0$.

□

Teorema 2 (decomposición de Hahn). Sea ν medida con signo sobre $(X, \mathcal{B})$. Entonces existen $P, N \in \mathcal{B}$ tales que P es positivo, N es negativo, y P, N forman una partición de X (osea $P \cup N = X$ y $P \cap N = \emptyset$). Además, si $P', N' \in \mathcal{B}$ es una otra partición con la misma propiedad, entonces las diferencias simetricas $P \Delta P', N \Delta N'$ son conjuntos nulos.

Proof. Sin pérdida de generalidad (osea, a menos de cambiar ν por $-\nu$), ν no toma el valor $+\infty$. En este caso, sea

$$\sup \{ \nu(A) : A \text{ positivo} \} =: M < \infty.$$

Sea A_i una sucesión de conjuntos positivos tales que $\nu(A_i) \rightarrow m$. Entonces $P := \bigcup_i A_i$ es un conjunto positivo y por monotonía (propiedad que para medidas con signo se demuestra cómo para las medidas positivas) vale $\nu(P) = m$. Definamos ahora $N := X \setminus P$ y verificamos que N es negativo: Si por contradicción existiera $A' \subset N$ con $\nu(A') > 0$, entonces por el Lemma 1 existiría $P' \subset A'$ positivo de medida $\nu(P') > 0$, y entonces, siendo $P' \cap P = \emptyset$, tuvieramos $\nu(P \cup P') = \nu(P) + \nu(P') > M$, contradicción.

Entonces obtuvimos una partición P, N cómo necesitamos. Dejamos la prueba que P, N es única a menos de conjuntos nulos para ejercicio. $\square$

Definición: Dos medidas positivas μ, ν sobre $(X, \mathcal{B})$ se dicen singulares una respecto a la otra, y denotamos

$$\mu \perp \nu,$$

si existen $M, N \in \mathcal{B}$ tales que $M \cap N = \emptyset$, $M \cup N = X$ y $\mu(N) = \nu(M) = 0$.

Por ejemplo, consideremos la medida de Dirac, de Cantor y de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Cada pareja entre estas tres medidas constituye un ejemplo de medidas singulares.

El próximo teorema es una consecuencia directa del teorema de decomposición de Hahn y de la definición precedente:

Teorema 3 (decomposición de Jordan). Sea ν una medida con signo sobre $(X, \mathcal{B})$. Entonces existen y son únicas dos medidas $\nu^+, \nu^- : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$, a lo más una de las cuales es finita y tales que

$$\nu = \nu^+ - \nu^-, \quad \nu^+ \perp \nu^-. \quad (2)$$

Definición: Si vale (2) entonces llamamos

$$|\nu| := \nu^+ + \nu^- \quad (3)$$

la variación total de ν , y decimos que ν es σ -finita cuando su variación total es σ -finita.

En efecto (ejercicio!) la variación total se puede expresar también de la manera siguiente:

$$|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\nu(A_i)| : A_1, \dots, A_n \text{ partición medible de } A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Teorema de Radon-Nikodym

Definición: Sean μ, ν medidas con signo sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{B})$. Decimos que ν es absolutamente continua respecto a μ y escribimos

$$\nu \ll \mu$$

si para cada conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) = 0$ vale también $\nu(A) = 0$.

Observación: En general puede valer $\nu \ll \mu \ll \nu$ y también puede valer $\nu \ll \mu$ y no valer $\mu \ll \nu$.

Proposición 4. Si ν es una medida finita con signo y μ es una medida positiva, entonces

$$\nu \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (\mu(A) < \delta \Rightarrow |\nu(A)| < \epsilon).$$

Proof. Si vale la condición a la derecha y $\mu(A) = 0$ entonces para cada $\epsilon > 0$ vale $|\nu(A)| < \epsilon$ y entonces $\nu(A) = 0$. Esto muestra que $\nu \ll \mu$.

Si la condición a la derecha no vale, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe A_k medible tal que

$$|\nu(A_k)| \geq \epsilon, \quad \mu(A_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Si denotamos

$$B := \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k,$$

entonces sigue (porqué? ejercicio!) $\mu(B) = 0$ y $|\nu(B)| \geq \epsilon$, y entonces no vale $\nu \ll \mu$. $\square$

Ahora nos preparamos para decomponer medidas en parte absolutamente continua y parte singular, lo que constituye el enunciado del teorema de Radon-Nikodym, abajo. El lema principal que ocupamos es el siguiente:

Lemma 5. Si μ, ν son medidas positivas finitas entonces vale *exactamente una* de las situaciones siguientes:

- $\mu \perp \nu$
- Existen $\epsilon > 0$ y un conjunto P de medida $\mu(P) > 0$ y tal que P es positivo para la medida $\nu - \epsilon\mu$.

Proof. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea P_n, N_n la partición dada por decomposición de Hahn de la medida $\nu - \frac{1}{n}\mu$ (osea una partición obtenida aplicando el Teorema 2 a esta medida). Vale que P_n son conjuntos crecientes y N_n decrecientes respecto a n . Llamamos además

$$P := \bigcup_{n \geq 1} P_n, \quad N := \bigcap_{n \geq 1} N_n.$$

Se verifica también que P, N es una partición de X (ejercicio! Pista: en terminos de P_n, N_n , cuales x estan en $P \cap N$? cuales en $P \cup N$?). Siendo ν positiva y N_n positivo para $\nu - \frac{1}{n}\mu$, valen las desigualdades

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N), \quad \Rightarrow \quad \nu(N) = 0.$$

Ahora vale exactamente una de las dos posibilidades siguientes:

- $\mu(P) = 0$, en el cual caso $\nu \perp \mu$ y estamos en el primer caso del lemma.
- $\mu(P) > 0$, en el cual caso, por monotonía existe n tal que $\mu(P_n) > 0$, y este P_n satisface el segundo caso del lemma para $\epsilon = \frac{1}{n}$.

$\square$

Teorema 6 (Radon-Nikodym). Sea ν una medida con signo σ -finita, y sea μ una medida positiva σ -finita, sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{B})$. En este caso

1. existen y son únicas dos medidas con signo σ -finitas ν_a, ν_s tales que

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu, \quad (4)$$

2. existe una función $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ medible y única a menos de conjuntos μ -nulos, tal que para todo $A \in \mathcal{B}$ vale

$$\nu_a(A) = \int_A f d\mu. \quad (5)$$

Proof. Sin pérdida de generalidad ν es positiva (si no ocupamos la decomposición de Jordan, Teorema 3, y escribimos $\nu = \nu^+ - \nu^-$, y aplicamos separadamente lo que sigue a ν^+ y ν^-).

Caso que μ, ν son finitas. Definamos la familia de funciones

$$\mathcal{F} := \left\{ g : X \rightarrow [0, \infty] \text{ medible tal que } \forall A \in \mathcal{B}, \int_A g d\mu \leq \nu(A) \right\}.$$

Observamos (ejercicio!) que $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ implica que también $\max\{g_1, g_2\} \in \mathcal{F}$ (Pista: considera separadamente los conjuntos $A \cap \{g_1 > g_2\}$ y $A \cap \{g_1 \leq g_2\}$, y compara $g_1, g_2, \max\{g_1, g_2\}$ sobre estos conjuntos).

Definamos ahora

$$m := \sup \left\{ \int_X g d\mu : g \in \mathcal{F} \right\} \leq \nu(X),$$

dónde la desigualdad sigue porque ν se asumió ser positiva. Entonces existen $g_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = m.$$

A menos de remplazar g_n por $\max\{g_1, \dots, g_n\}$ (lo que es posible a causa del ejercicio arriba), tenemos que g_n forma una sucesión creciente. Por el teorema de convergencia monotónica para cada $A \in \mathcal{B}$ vale

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \nu(A).$$

Comparando esto con las definiciones de $\mathcal{F}$ y de m , obtenemos

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \in \mathcal{F}, \quad \text{y entonces} \quad \int_X f d\mu = m.$$

Ahora ocupamos esta f para definir ν_a por la fórmula (5), y nos queda que demostrar que la medida $\nu_s = \nu - \nu_a$ es singular respecto a μ . Observamos que

$$\nu_s(A) := \nu(A) - \int_A f d\mu \geq 0$$

a causa del hecho que $f \in \mathcal{F}$.

Suponamos por contradicción que ν_s no sea singular respecto a μ . Entonces por el Lemma 5 sigue que existe $\epsilon > 0$ y un conjunto P con $\mu(P) > 0$ y $\nu_s|_P \geq \epsilon\mu|_P$. Esto significa explícitamente que para todo $A \in \mathcal{B}$ vale

$$\nu(A) = \int_A f d\mu + \nu_s(A) \geq \int_A (f + \epsilon 1_P) d\mu.$$

Esto implica que $f + \epsilon 1_P \in \mathcal{F}$. Pero $f + \epsilon 1_P$ tiene integral $m + \epsilon \mu(P)$ estrictamente más grande que m , lo que contradice la definición de m . Esto demuestra que efectivamente $\nu_s \perp \mu$.

Para demostrar la unicidad de la decomposición (4), observamos que si $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu'_a + \nu'_s$ entonces $\nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s$ y el miembro derecho es $\perp \mu$ mientras que el miembro izquierdo es $\ll \mu$. Entonces los dos miembros son la medida cero. Esto también prueba que f es únicamente determinada μ -c.t.p.

Caso que μ, ν sean generales σ -finitas. En este caso podemos escribir

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \text{con} \quad \mu(A_i) < \infty, \quad |\nu|(A_i) < \infty,$$

y podemos aplicar el resultado para el caso finito a las restricciones de μ, ν a cada A_i . Las decomposiciones (4) para las restricciones nos entregan sumando sobre i la decomposición para la medida global (ejercicio: completa la prueba!) $\square$

Definición: Si μ, ν y ν_a, ν_s son cómo en el Teorema 6, entonces la función f en (5) se llama la derivada de Radon-Nikodym de ν respecto a μ , y se denota también por

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Derivación de medidas sobre $\mathbb{R}^n$

Vamos a ocupar el lemma de Vitali para identificar la derivada de Radon-Nikodym con un limite puntual casi todas partes, un resultado similar a la diferenciación del integral de Lebesgue, que generaliza este resultado para medidas. Necesitamos para esto una regularidad por aproximación por abiertos y compactos, cómo lo que vale para la medida de Lebesgue. Empezamos por un resultado general sin hipótesis.

Proposición 7. Sea X un espacio topológico y μ una medida finita sobre el espacio $(X, \mathcal{B})$ con $\mathcal{B}$ la σ -álgebra engendrada por los conjuntos abiertos, (esta se llama σ -álgebra Boreliana de X , similmemente al caso $X = \mathbb{R}^d$). Entonces para cada $E \in \mathcal{B}$ vale

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(A) : A \supset E, A \text{ abierto} \} \quad (6)$$

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(C) : C \subset E, C \text{ cerrado} \}. \quad (7)$$

Proof. Demostremos la primera igualdad del teorema y la segunda se demuestra de manera similar.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de los $E \in \mathcal{B}$ tales que vale la igualdad. En particular $\mathcal{A}$ contiene los abiertos de X . Es suficiente de demostrar que es una σ -álgebra, lo que por definición de σ -álgebra engendrada y por definición de $\mathcal{B}$ implica que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Si $E_j \in \mathcal{A}$ entonces existen abiertos $A_j \supset E_j$ que satisfacen $\mu(A_j) \leq \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. En este caso valen las inclusiones

$$\left(\bigcup_{j \geq 1} A_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j \geq 1} E_j \right) \subset \bigcup_{j \geq 1} (A_j \setminus E_j), \quad \left(\bigcap_{j \geq 1} A_j \right) \setminus \left(\bigcap_{j \geq 1} E_j \right) \subset \bigcup_{j \geq 1} (A_j \setminus E_j),$$

y entonces el abierto $A = \bigcup_{j \geq 1} A_j$ satisface

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{j \geq 1} E_j\right) \leq \epsilon,$$

y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que el abierto $A^{(N)} := \bigcap_{j=1}^N A_j$ satisface

$$\mu\left(A^{(N)} \setminus \bigcap_{j \geq 1} E_j\right) \leq 2\epsilon,$$

lo que por la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ implica que $\bigcup_{j \geq 1} E_j$ y $\bigcap_{j \geq 1} E_j$ pertenecen también a $\mathcal{A}$ si E_j pertenecen. Esto prueba que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ como queríamos. $\square$

La propiedad (6) se llama *regularidad exterior* y la propiedad (7) se llama *regularidad interior*. Vamos a introducir una clase de medidas que satisface algo un poquito mas fuerte que (7) (esta propiedad también se llama “regularidad interior” en la literatura, y nosotros la llamamos así también, con abuso de notación.. en realidad las dos nociones coinciden en $\mathbb{R}^n$ para medidas que son finitas sobre los compactos, cómo decimos en el ejercicio siguiente).

Definición: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ su σ -álgebra boreliana. Una medida μ sobre $\mathcal{B}$ se llama medida de Radon si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ compacto}\}.$$

Ejercicio: Si X es un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ con K_n compactos, entonces una medida sobre la σ -álgebra boreliana de X y finita sobre los compactos, automáticamente es una medida de Radon.

Un caso particular de espacio X cómo en el ejercicio precedente es $\mathbb{R}^n$ con su topología usual.

Las dos definiciones siguientes están formuladas por simplicidad en $\mathbb{R}^n$ pero es posible de formularlas analogamente en un espacio con bolas más general.

Definición: Si μ, ν son medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ entonces definimos

$$\overline{D}_\mu \nu(x) := \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{\nu(B(x, \rho))}{\mu(B(x, \rho))}, \quad \underline{D}_\mu \nu(x) := \liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{\nu(B(x, \rho))}{\mu(B(x, \rho))}.$$

Si los dos límites arriba son iguales llamamos su valor común $D_\mu \nu(x)$.

Definición: Sea μ una medida sobre $\mathbb{R}^n$ con la σ -álgebra boreliana. Entonces el soporte de μ se define por

$$\text{spt}(\mu) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 : \mu(B(x, r)) > 0\}.$$

Teorema 8 (diferenciación de medidas). Sean μ, ν medidas de Radon positivas finitas sobre $\mathbb{R}^n$.

1. μ -c.t.p. vale

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x). \quad (8)$$

2. Si definimos

$$I := (\mathbb{R}^n \setminus \text{spt}(\mu)) \cup \{x : \underline{D}_\mu \nu(x) = \infty\}, \quad (9)$$

entonces $\nu|_I$ es la parte singular ν_s de ν respecto a μ .

Antes de demostrar el teorema demostramos tres lemmas, para los cuales nos ponemos bajo las mismas hipotesis que las del teorema, sin mencionarlas.

Lemma 9.

1. Si $\underline{D}_\mu \nu \leq t$ en todo punto $x \in A$ entonces $\nu(A) \leq t\mu(A)$.
2. Si $\overline{D}_\mu \nu \geq t$ en todo punto $x \in A$ entonces $\nu(A) \geq t\mu(A)$.

Proof. Esto sigue del teorema de Vitali. Suponemos sin perdida de generalidad que A es acotado (en general reproducimos el razonamiento por pedazos, utilizando que A se puede particionar en un numero numerable de conjuntos acotados).

Fijamos $\epsilon > 0$. Sea U abierto con $\bar{U}$ compacto, tal que $A \subset U$ y que $\nu(U) \leq \nu(A) + \epsilon$, y consideramos las bolas

$$\mathcal{B} := \{B(x, r) : x \in E, B(x, r) \subset U, (t - \epsilon)\mu(B(x, r)) \leq \nu(B(x, r))\}.$$

Por el Teorema de recubrimiento de Vitali, existe una familia $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ numerable y formada por bolas disjuntas tal que $\mu(A \setminus \cup \mathcal{B}') = 0$, y podemos escribir:

$$(t - \epsilon)\mu(A) \leq (t - \epsilon) \sum_{B \in \mathcal{B}'} \mu(B) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}'} \nu(B) \leq \nu(U) \leq \nu(A) + \epsilon.$$

Para la arbitrariedad de $\epsilon > 0$ esto nos entrega el primer punto del lemma, y el segundo sigue con un procedimiento similar. $\square$

Sigue del lemma precedente que

$$\nu(\text{spt}(\mu) \cap \{\underline{D}_\mu \nu = 0\}) = 0. \quad (10)$$

Lemma 10. Sea

$$J := \{x \in \text{spt}(\mu) : \overline{D}_\mu \nu(x) = +\infty\}.$$

Entonces $\mu(J) = 0$.

Proof. Sea para $t > 0$

$$J_t := \{x \in \text{spt}(\mu) : \overline{D}_\mu \nu(x) > t\}.$$

Entonces para el lemma precedente, $t\mu(J_t) \leq \nu(\mathbb{R}^n)$ y tomando el limite $t \rightarrow \infty$ obtenemos $J_t \downarrow J$ sigue $\mu(J) = 0$. $\square$

Lemma 11. Sea

$$I := \{x \in \text{spt}(\mu) : \underline{D}_\mu \nu(x) = +\infty\}.$$

Entonces $\nu|_{\mathbb{R}^n \setminus I} \ll \mu$.

Proof. Sea $\mu(B) = 0$. Si denotamos

$$I_t := \{x \in \text{spt}(\mu) : \underline{D}_\mu \nu(x) < t\},$$

entonces por el Lemma 9 vale $\nu(B \setminus I_t) \leq t\mu(B) = 0$ y $\mathbb{R}^n \setminus I_t \uparrow \mathbb{R}^n \setminus I$, entonces $\nu(B \setminus I_t) \rightarrow \nu(B \setminus I) = 0$, lo que implica el resultado buscado. $\square$

Demostración del Teorema 8: Sin perdida de generalidad μ y ν son finitas (el caso general se obtiene particionando el dominio en un numero a lo más numerable de conjuntos en los cuales μ, ν son finitas).

Sin perdida de generalidad, $\nu|_{\mathbb{R}^n \setminus \text{spt}(\mu)} = 0$, y I definido en (9) es lo mismo que en el Lemma 11. En este caso definimos

$$\nu_a := \nu|_{\mathbb{R}^n \setminus I}, \quad \nu_s := \nu|_I.$$

Sabemos que $\nu_a \ll \mu$ por el Lemma 11 y $\nu_s \perp \mu$ porque $I \subset J$ y ocupando el Lemma 10. Entonces lo que falta es de demostrar la identificación de la derivada de Radon-Nikodym (8).

Sean

$$\bar{\nu}(E) := \int_{E \cap \text{spt}(\mu)} \bar{D}_\mu \nu d\mu, \quad \underline{\nu}(E) := \int_{E \cap \text{spt}(\mu)} \underline{D}_\mu \nu d\mu.$$

Es claro que $\underline{\nu}(E) \leq \bar{\nu}(E)$ para todo E Borel. Vamos a demostrar que

$$\bar{\nu}(E) \leq \nu_a(E) \leq \underline{\nu}(E) \quad \text{para todo } E \text{ Borel}, \quad (11)$$

y esto concluye la prueba de (8).

Sea $t > 1$ y definamos

$$\begin{aligned} E_m &:= E \cap \{t^m < \bar{D}_\mu \nu \leq t^{m+1}\} \setminus I, \\ E_\infty &:= E \cap \{\bar{D}_\mu \nu = \infty\} \setminus I = E \cap J \setminus I. \end{aligned}$$

Entonces por el Lemma 9 vale

$$\bar{\nu}(E_m) \leq t^{m+1} \mu(E_m) \leq t \nu(E_m) = t \nu_a(E_m),$$

y por el Lemma 10 vale $\mu(E_\infty) = 0$ y $\bar{\nu}(E_\infty) = 0$. Sumando sobre m la ultima ecuación,

$$\bar{\nu}(E) = \sum_{m \geq 0} \bar{\nu}(E_m) \leq t \sum_{m \geq 0} \nu_a(E_m) \leq t \nu_a(E).$$

por $t \downarrow 1$ obtenemos entonces $\bar{\nu}(E) \leq \nu_a(E)$. Remplazando $\bar{D}_\mu \nu$ por $\underline{D}_\mu \nu$ obtenemos con una estrategia similar $\nu_a(E) \leq \underline{\nu}(E)$. Esto completa la prueba de (11), y del teorema. $\square$