

Teorema de recubrimiento de Besicovitch

Caso de un recubrimiento finito o numerable

Empezamos con el teorema de Besicovitch en el caso de familias finitas. Este resultado dice que una familia finita de bolas en $\mathbb{R}^n$ se puede siempre descomponer en M familias compuestas de bolas disjuntas, donde M depende solamente de la dimensión n . Vamos a ver abajo una cota precisa para M , que va a resultar de un lema de geometría euclidiana elemental. A causa de este ingrediente “geometrico” el teorema de Besicovitch es un resultado más preciso y menos generalizable que el teorema de Vitali visto antes, pero vamos a ver abajo que Besicovitch nos permite también de diferenciar medidas generales, mientras que Vitali nos permite solamente de diferenciar medidas “doubling”. Estos ingredientes nos indican un concepto bastante profundo, osea que está un balance entre la regularidad/riqueza geometrica del espacio medible que consideramos y la regularidad de los objetos sobre este espacio que podemos diferenciar. Parece no ser exagerado decir que el problema de hacer preciso este balance queda un tema de investigación profundo, con muchas aplicaciones en la ciencia moderna, y que contiene varias direcciones abiertas.

Teorema 1 (Teorema de Besicovitch finito). Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe M dependiente solamente de n (y con la cota (4) explicita abajo) tal que si $\mathcal{B}$ es una familia finita de bolas en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad que

$$\text{Ninguna bola de } \mathcal{B} \text{ contiene los centros de las otras bolas de } \mathcal{B} \quad (1)$$

entonces existen M subfamilias $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M \subset \mathcal{B}$ tales que

1. Las bolas $\mathcal{B}_j$ son disjuntas para $j = 1, \dots, M$.
2. $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^M \mathcal{B}_i$.

Algoritmo para demostrar el Teorema 1:

1. Empezamos eligiendo una bola $B_1^1 \in \mathcal{B}$ de radio máximo.
2. Por iteración, eligimos $B_1^2 \in \mathcal{B}$ de radio máximo entre las bolas que no intersectan B_1^1 , y $B_1^3 \in \mathcal{B}$ de radio máximo entre las bolas que no intersectan $B_1^1 \cup B_1^2$, y así siguiendo encontramos $B_1^k \in \mathcal{B}$ que no intersecta las $B_1^1, \dots, B_1^{k-1}$.
3. Si no es posible encontrar B_1^{k+1} en la iteración precedente, denotamos

$$\mathcal{B}_1 := \{B_1^j : j = 1, \dots, k\}.$$

4. Considerando ahora las bolas $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$ aplicamos nuevamente la iteración arriba, y encontramos una nueva familia de bolas disjuntas $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$.
5. Continuamos a iterar el proceso del paso precedente, hasta a qué terminamos todas las bolas de $\mathcal{B}$. Así obteniendo familias $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M$.
6. **Conclusión:** Obtenemos que, por consecuencia de la construcción arriba, cada bola $B_M^k \in \mathcal{B}_M$ intersecta porlomenos una bola de cada familia $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{M-1}$ (sino habría estado eligida a un paso precedente!), y cadauna de estas bolas tiene radio mayor que B_M^k (por el mismo motivo).

Vamos a ocupar el resultado de la conclusión arriba, para poder acotar el numero M de familias que construimos. Para hacer esta cota nos preguntamos *cuantas otras bolas de radios mayores una bola B_M^k puede intersectar, si sabemos que todas las bolas consideradas satisfacen la condición (1) del teorema*, osea si el centro de una bola no está incluido en ninguna otra bola.

Una desigualdad muy sencilla valida en espacios euclidianos es lo que va ayudarnos fuertemente. Se note que aquí n no aparece, y es el *Teorema de Pitagoras* (osea el facto que nuestra distancia es una distancia euclidiana) que juega el rol fundamental.

Lemma 2. En un espacio Euclidiano consideramos todas las triplas de bolas $B(0, 1), B(a, r_a), B(b, r_b)$ que satisfacen (1) y tales que $r_a, r_b \geq 1$.

1. El valor minimal α_0 del angulo $\widehat{ab}$ entre a, b , cuando minimizamos sobre todas las triplas cómo arriba, se realiza en el caso que $2 = |a| = |b| = |a-b|+1 = r_a+1 = r_b+1$.
2. En particular, para todas las triplas cómo arriba, vale

$$B\left(2\frac{a}{|a|}, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(2\frac{b}{|b|}, \frac{1}{2}\right) = \emptyset. \quad (2)$$

Observación: El principio descrito en el lemma vale independientemente de n : si demostramos el lemma en $\mathbb{R}^2$ entonces vale en todo espacio euclidiano (por n general será suficiente restringirnos al plano engendrado por $0, a, b$, los cuales están en posición general a causa de la condición (1)).

Demostración del lemma: El punto 2 del lemma sigue del punto 1 directamente: las bolas

$$B(a', r_{a'}) := B\left(2\frac{a}{|a|}, 1\right), B(b', r_{b'}) := B\left(2\frac{b}{|b|}, 1\right) \quad (3)$$

satisfacen la condición $2 = |a'| = |b'| = |a' - b'| + 1 = r_{a'} + 1 = r_{b'} + 1$. Además por el punto 1, $\alpha_0 \geq \widehat{ab} = \widehat{a'b'}$ con igualdad solo si $|a' - b'| = 1$. Por un calculo de geometría euclidiana vale entonces $1 \leq |a' - b'|$, y las bolas (2) son disjuntas, demostrando el punto 1.

Para demostrar el punto 1, notamos que si $|a| < |b|$ entonces podemos remplazar a por $a' := ((r_a + 1)/|a|)a$, y b por $b' := ((r_b + 1)/|b|)b$, y despues disminuir un poco el angulo $\widehat{a'b'}$ sin contradecir la desigualdad $|a' - b'| \leq \max\{r_{a'}, r_{b'}\}$ que certifica la condición (1). En este procedimiento el angulo disminue: $\widehat{a'b'} \leq \widehat{ab}$, con igualdad solo si $a' = a, b' = b$. Entonces suponamos sin perdida de generalidad que $|a| = r_a + 1, |b| = r_b + 1$.

A menos de acercar los centros de las bolas sin cambiar $|a|, |b|$, podemos suponer que $|a - b| = \max\{r_a, r_b\} = r_a \leq r_b$. Ahora de nuevo podemos alejar b hacia $b' := ((r_a + 1)/(r_b + 1))b$ y acercar a, b' sin cambiar $|a|, |b'|$, lo que disminua el angulo entre estos vectores a menos que $r_a = r_b$. Entonces podemos suponer $|a| = |b| = |a - b| + 1 = r_a + 1 = r_b + 1$.

Ocupando la formula $\cos(\widehat{ab}) = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2|a||b|}$ que sigue del teorema de Pitagoras, obtenemos $\cos(\widehat{ab}) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|a|}\right)^2$, que es minimo por $|a| = 1$, concluyendo la prueba. $\square$

Ocupando el lemma precedente para una familia de bolas, obtenecemos el enunciado siguiente:

Lemma 3. Suponemos que $B(x_0, r_0) = B(0, 1)$ y $B(x_i, r_i), i = 1, \dots, M$ son bolas en $\mathbb{R}^n$, tales que

1. Para todo $i = 1, \dots, M$ vale $B(x_0, r_0) \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset$.
2. Para todo $i \neq j \in \{0, \dots, M\}$ vale $x_j \notin B(x_i, r_i)$.
3. Para todo $i = 1, \dots, M$ vale $r_i \geq r_0$.

Entonces las bolas $B\left(2\frac{x_i}{|x_i|}, \frac{1}{2}\right)$ con $i = 1, \dots, M$ son disjuntas.

Esto nos permite de llegar al resultado siguiente:

Lemma 4. Suponemos que $B(x_0, r_0), \dots, B(x_M, r_M)$ son bolas de $\mathbb{R}^n$ tales que

1. $B(x_0, r_0) \cap B(x_i, r_i)$ para $i = 1, \dots, M$.
2. $x_i \notin B(x_i, r_i)$ para $i \neq j \in \{0, \dots, M\}$.
3. $r_i \geq r_0$ para $i = 1, \dots, M$.

Entonces $M \leq 5^n$.

Dem.: Sin perdida de generalidad (a menos de dilataciones y translaciones) suponemos $(x_0, r_0) = (0, 1)$ cómo en el lemma 3, y $r_i \geq 1$. El lemma 3 nos entrega que las bolas $B\left(2\frac{x_i}{|x_i|}, \frac{1}{2}\right), i = 1, \dots, M$, son disjuntas. Estas bolas están también contenidas en $B(0, 5/2)$ y entonces (utilizando el facto que $|B(x, ar)| = |B(0, ar)| = a^n |B(0, r)|$ a causa del comportamiento por translación y dilatación de la medida de Lebesgue)

$$5^n |B(0, 1/2)| |B(0, 5/2)| \geq \left| \bigcup_{i=1}^M B\left(2\frac{x_i}{|x_i|}, \frac{1}{2}\right) \right| = \sum_{i=1}^M \left| B\left(2\frac{x_i}{|x_i|}, \frac{1}{2}\right) \right| = M |B(0, 1/2)|,$$

y entonces $5^n \geq M$ cómo necesitaríamos demostrar. □

Término de la prueba del Teorema 1: Cómo observamos en el paso 6 de la descripción de nuestro algoritmo, las bolas $B(x_0, r_0)$ construidas en el paso $M' + 1$ del algoritmo encuentran cadauna porlo menos una bola $B(x_i, r_i) \in \mathcal{B}_i$ por cada $i = 1, \dots, M'$. Se verifica que estamos en la situación del enunciado del Lemma 4: las condiciones 1 y 3 del lemma valen por la observación del paso 6 del algoritmo, y la condición 2 vale por hipotesis del teorema. Entonces por la cota del Lemma 4, el algoritmo termina no mas tarde del paso $M' + 1$ dónde $M' \leq 5^n$, y entonces vale la tesi del teorema con

$$M \leq 5^n + 1. \tag{4}$$

□

Ahora ocupamos el Teorema 1 para demostrar su analogo para familias numerables.

Teorema 5 (Teorema de Besicovitch numerable). Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe M que podemos tomar igual al valor encontrado en el Teorema 1 (entonces $M \leq 5^n + 1$ cómo en (4)), y tal que si $\mathcal{B}$ es una familia *numerable* de bolas en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad que

$$\text{Ninguna bola de } \mathcal{B} \text{ contiene los centros de las otras bolas de } \mathcal{B} \tag{5}$$

entonces existen $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M \subset \mathcal{B}$ tales que

1. Las bolas $\mathcal{B}_j$ son disjuntas para $j = 1, \dots, M$.
2. Las $\mathcal{B}_i$ forman una partición de la familia $\mathcal{B}$.

Algoritmo para demostrar el Teorema 5: Siendo $\mathcal{B}$ numerable, podemos escribir $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^\infty$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{B}^k := \{B_1, \dots, B_k\}$ la familia de las primeras k bolas. Aplicamos el Teorema 1 a $\mathcal{B}^k$ y obtenemos una partición en M familias de bolas disjuntas

$$\mathcal{B}^k = \mathcal{B}_1^k \cup \dots \cup \mathcal{B}_M^k.$$

A menos de adjuntar familias vacías, suponemos que M es independiente de k .

Cómo a cada paso k la bola B_1 está incluida en la familia $\mathcal{B}^k$, existe una sucesión $\alpha_1(k) \in \{1, \dots, M\}$ tal que

$$B_1 \in \mathcal{B}_{\alpha_1(k)}^k, \quad \text{para cada } k \geq 1.$$

Cómo $\alpha_1 : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, M\}$ toma un numero finito de valores, toma porlo menos uno de los valores infinitas veces. Osea, existe $i_1 \in \{1, \dots, M\}$ tal que

$$\mathcal{K}_1 := \alpha_1^{-1}(\{i_1\}) \subset \mathbb{N} \quad \text{es infinito.}$$

Para B_2 , podemos ahora considerar solo $k \in \mathcal{K}_1$ y para $k \geq 2$ definamos $\alpha_2(k)$ cómo el indice tal que

$$B_2 \in \mathcal{B}_{\alpha_2(k)}^k, \quad \text{para cada } k \in \mathcal{K}_1, k \geq 2.$$

Entonces tenemos una función $\alpha_2 : \mathcal{K}_1 \cap \{2, 3, \dots\} \rightarrow \{1, \dots, M\}$ que sobre un conjunto infinito toma finitos valores, y entonces existe $i_2 \in \{1, \dots, M\}$ tal que

$$\mathcal{K}_2 := \alpha_2^{-1}(\{i_2\}) \subset \mathcal{K}_1 \cap \{k \geq 2\} \quad \text{es infinito.}$$

Continuando iterativamente, para cada $m \in \mathbb{N}$ encontramos conjuntos $\dots \subset \mathcal{K}_m \subset \mathcal{K}_{m-1} \subset \dots \subset \mathcal{K}_1$, todos infinitos, y una sucesión $(i_m)_{m \in \mathbb{N}}$ con valores en $\{1, \dots, M\}$ tal que

$$B_1 \in \mathcal{B}_{i_1}^k, \dots, B_m \in \mathcal{B}_{i_m}^k \quad \text{para todos } k \in \mathcal{K}_m.$$

Ahora podemos asociar a cada $B_p \in \mathcal{B}$ su “indice infinito” i_p , y obtenemos las M familias $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M$ definidas por

$$\mathcal{B}_j := \{B_p \in \mathcal{B} : i_p = j\}.$$

Es facil de verificar que

1. Cada bola B_j está en una y una sola de las familias $\mathcal{B}_i$, (por definición: esta es la familia $\mathcal{B}_{i_j}$
2. Si $B_a \neq B_b$ están en la misma familia $\mathcal{B}_i$ entonces estan disjuntas (por construcción, para todo $m \geq \max\{a, b\}$ vale $B_a, B_b \in \mathcal{B}_i^m$, y siendo que $\mathcal{B}_i^m$ fue obtenida por el Teorema 1, contenece bolas disjuntas, y entonces B_a, B_b son disjuntas).

Esta verificación completa la demostración del teorema. $\square$

Observación: En efecto, la prueba del Teorema 5 tiene una interpretación combinatoria: Asociando un grafo a $\mathcal{B}$ con vertices las bolas y un lado para cada pareja de bolas que se intersectan, uno está intentando de construir un “coloramiento” del grafo por M colores tal que vertices con el mismo color no estén conectados. Ideas similares a las de esta prueba se puede ocupar para pasar al caso numerable otros resultados de coloramiento de grafos. En efecto mucho de la discusión de recubrimientos válida en $\mathbb{R}^n$ se puede generalizar para familias de grafos. Esto por ejemplo aparece en el importante **Lema de regularidad de Szemerédi**, un lema sobre límites de grafos, cuya prueba ocupa principios similares a los de esta parte del curso.

Teorema de Besicovitch general

Vamos a tratar ahora el caso de familias de bolas $\mathcal{B}$ no necesariamente numerables en $\mathbb{R}^n$ y también relajaremos la condición de que las bolas eviten centros de otras bolas al mismo tiempo. El teorema que demostramos es el siguiente:

Teorema 6 (Teorema de Besicovitch). Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M \leq (5^n + 1)^2$ tal que si $\mathcal{B}$ es una familia de bolas

- cuyo conjunto de centros $A := \{x : \exists B = B(x, r) \in \mathcal{B}\} \subset \mathbb{R}^n$ es acotado
- cuyo conjunto de radios $\mathcal{R} := \{r > 0 : \exists B = B(x, r) \in \mathcal{B}\} \subset (0, \infty)$ es acotado

entonces se pueden encontrar M subfamilias a lo más numerables $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_M \subset \mathcal{B}$ tales que

1. Las bolas en $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_M$ cubren A .
2. Para cada $j = 1, \dots, M$ las bolas de $\mathcal{B}_j$ son disjuntas.

Algoritmo para el Teorema 6:

Sea $\mathcal{A}_1 := \mathcal{B}$ y sea $s_1 := \sup\{r : \exists x \in \mathbb{R}^n, B(x, r) \in \mathcal{A}_1\}$. Al paso 1 encontramos una bola $B(x_1, r_1) \in \mathcal{A}_1$ tal que $r_1 > \frac{3}{4}s_1$.

Al paso $m + 1$ definamos $\mathcal{A}_{m+1}$ cómo las bolas cuyos centros no están cubiertos por bolas de pasos precedentes:

$$\mathcal{A}_{m+1} := \left\{ B(x, r) \in \mathcal{B} : x \notin \bigcup_{j \leq m} B(x_j, r_j) \right\},$$

y eligimos la próxima bola en este conjunto, y que tiene radio cerca del supremo:

$$B(x_{m+1}, r_{m+1}) \in \mathcal{A}_{m+1}, \quad \text{tal que} \quad r_{m+1} > \frac{3}{4} \sup\{r : \exists x \in \mathbb{R}^n, B(x, r) \in \mathcal{A}_{m+1}\}. \quad (6)$$

Continuamos a elegir bolas sucesivamente de esta manera si $\mathcal{A}_{m+1} \neq \emptyset$, y definamos

$$\mathcal{G} := \{B_1, B_2, \dots\}$$

el conjunto (finito o numerable) de las bolas obtenidas de esta manera. Vamos a demostrar las 4 propiedades útiles para lo que sigue:

Propiedades de $\mathcal{G}$ obtenidos por el algoritmo:

1. Para todos $i \neq j \in \mathbb{N}$ vale $x_j \notin B(x_i, \frac{3}{4}r_i), x_i \notin B(x_j, \frac{3}{4}r_j)$.
(Prueba: sea sin perdida de generalidad $i < j$. Siendo que x_j es un centro no cubierto por las bolas precedentes, $x_j \notin B(x_i, r_i)$ y entonces $x_j \notin B(x_i, \frac{3}{4}r_i)$ también. Desde $x_j \notin B(x_i, r_i)$ sigue también $|x_i - x_j| > r_i$ y por la definición de r_i y por el facto que $B(x_j, r_j) \in \mathcal{A}_i$ para $i < j$, vale $r_i > \frac{3}{4}r_j$ y entonces $|x_i - x_j| > \frac{3}{4}r_j, \Rightarrow x_i \notin B(x_j, \frac{3}{4}r_j)$.)
2. Si para $i \neq j \in \mathbb{N}$ vale $B(x_i, \frac{3}{4}r_i) \cap B(x_j, \frac{3}{4}r_j) = \emptyset$ entonces vale también $x_j \notin B(x_i, r_i), x_i \notin B(x_j, r_j)$.
(Prueba: Sea sin perdida de generalidad $i < j$. Ya en el paso precedente habemos justificado el facto que $x_j \notin B(x_i, r_i)$, y $r_i > \frac{3}{4}r_j$. Además sigue de nuestra hipotesis y utilizando este ultima desigualdad, que $|x_i - x_j| > \frac{3}{4}(r_i + r_j) > \frac{3}{4}(\frac{3}{4}r_j + r_j) = \frac{21}{16}r_j > r_j$. Esto demuestra que $x_i \notin B(x_j, r_j)$ y concluye la prueba de este paso)
3. Si $\#\mathcal{G} = \infty$ entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 0$.
(Prueba: A es acotado entonces existe una subsucesión de Cauchy de los centros $x_j \in A$ de nuestras bolas, osea existe j_k tal que $|x_{j_k} - x_{j_{k+1}}| \rightarrow 0$. Cómo en los puntos precedentes $|x_{j_k} - x_{j_{k+1}}| > r_{j_k}$, y $r_{j_k} > \frac{3}{4}r_j$ para todo $j > j_k$. Entonces $r_j \rightarrow 0$ también.)
4. Las bolas de $\mathcal{G}$ cubren el conjunto de centros A .
(Prueba: para el caso $\#\mathcal{G} < \infty$ esto sigue directamente, porque significa que en un numero finito de pasos se obtenece $\mathcal{A}_{m+1} = \emptyset$, lo que significa que A es cubierto por las bolas obtenidas en los primeros m pasos. Si $\#\mathcal{G} = \infty$, ocupamos el punto precedente. Sea $x \in A$ y entonces existe $B(x, r) \in \mathcal{B}$ de centro x . Por el punto precedente, existe m tal que $r_{m+1} < \frac{3}{4}r$. Entonces $x \in B(x_1, r_1) \cup \dots \cup B(x_m, r_m)$, porqué si x no estuviera en esta unión estuviera en $\mathcal{A}_{m+1}$ y con nuestra desigualdad contradeciríamos la elección de r_{m+1} en (6).)

Termino de la demostración del Teorema 6: Ahora vamos a subdividir $\mathcal{G}$ en un numero $M \leq (5^n + 1)^2$ de familias disjuntas, ocupando el Teorema 5. Vamos a denotar $\lambda\mathcal{G}$ la familia de bolas obtenida desde $\mathcal{G}$ remplazando cada bola de radio r de $\mathcal{G}$ por una bola de radio λr , osea $\lambda\mathcal{G} := \{B(x, \lambda r) : B(x, r) \in \mathcal{G}\}$.

- Por el punto 4 precedente, $\mathcal{G}$ cubre A y por construcción $\mathcal{G}$ es numerable. Por el punto 1 precedente se puede aplicar el Teorema 5 a la familia $\frac{3}{4}\mathcal{G}$ y obtenecemos una partición de esta familia en a lo más $5^n + 1$ familias de bolas disjuntas:

$$\frac{3}{4}\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{M_1} \frac{3}{4}\mathcal{G}_i, \quad \text{cada familia } \frac{3}{4}\mathcal{G}_i \text{ contenece bolas disjuntas,} \quad M_0 \leq 5^n + 1. \quad (7)$$

- Cadauna de las familias $\frac{3}{4}\mathcal{G}_i$ es formadas de bolas $B(x_i, \frac{3}{4}r_i)$ disjuntas, y entonces por la propiedad 2 de $\mathcal{G}$, las bolas $B(x_i, r_i)$ satisfacen la propiedad (5) y entonces $\mathcal{G}_i$ verifica las hipotesis del Teorema 5. Aplicando este teorema, obtenecemos una partición de $\mathcal{G}_i$ en a lo más $5^n + 1$ familias de bolas disjuntas.

$$\mathcal{G}_i = \bigcup_{j=1}^{M_i} \mathcal{G}_{ij}, \quad \text{cada familia } \mathcal{G}_{ij} \text{ contenece bolas disjuntas,} \quad M_j \leq 5^n + 1. \quad (8)$$

- Entonces $\mathcal{G}$ esta particionado en a lo más $(5^n + 1)^2$ familias de bolas disjuntas $\mathcal{G}_{ij}$:

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{M_0} \mathcal{G}_i = \bigcup_{i=1}^{M_0} \bigcup_{j=1}^{M_i} \mathcal{G}_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{M_0} M_i \stackrel{(8)}{\leq} M_0(5^n + 1) \stackrel{(7)}{\leq} (5^n + 1)^2.$$

□