

Función maximal - ayudantía

1 Repaso de las cosas hechas en clase

Lemma de Vitali

Lemma 1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio con bolas equipado con una medida doubling. Si $\mathcal{F}$ es una familia finita de bolas entonces existe una sub-familia disjunta (osea formada por bolas disjuntas) $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\bigcup_{B(x,r) \in \mathcal{F}} B(x,r) \subset \bigcup_{B(x',r') \in \mathcal{F}'} B(x',c_1 r'). \quad (1)$$

Además vale

$$\mu \left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right) \leq c_2 \sum_{B' \in \mathcal{F}'} \mu(B'). \quad (2)$$

Función maximal

Sea $(X, \{B(x,r)\})$ es un espacio con bolas con constante c_1 y μ una medida doubling con constante c_2 sobre X .

Definición: Si f medible, definamos para $x \in X$:

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y), \quad \tilde{M}f(x) := \sup_{\substack{B \text{ bola,} \\ x \in B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y). \quad (3)$$

La función Mf se llama función maximal de f y $\tilde{M}f$ se llama función maximal decentrada de f .

Propiedades elementales de Mf , $\tilde{M}f$: (demostraciones dejadas como ejercicio)

- $Mf = M|f| = |Mf|$, $\tilde{M}f = \tilde{M}|f| = |\tilde{M}f|$.
- Para todo x vale $\tilde{M}f(x) \geq Mf(x)$.
- Para todo x , siendo que μ es doubling, $\tilde{M}f(x) \leq c_2 Mf(x)$.

Teorema maximal

Recordamos que el espacio $L^{1,\infty}(\mu)$ sobre un espacio de medida es formado por las funciones tales que

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(\mu)} := \sup_{\alpha>0} \alpha \mu(\{|f| > \alpha\}) < \infty. \quad (4)$$

Hipotesis adicional sobre μ : La medida μ satisface la aproximabilidad por “compactos” (5):

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(E') : E' \subset E, E' \text{ compacto} \}. \quad (5)$$

Teorema 2. Suponemos que $(X, \{B(x, r)\})$ es un espacio con bolas y que μ es una medida doubling de constante c_2 que satisface la propiedad (5).

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible.

1. Si $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces $Mf(x) < \infty$ para μ -casi todo $x \in X$.
2. Si $f \in L^1(\mu)$ entonces vale

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mu)} \leq c_2 \|f\|_{L^1(\mu)}. \quad (6)$$

3. Si $f \in L^p(\mu)$ con $1 < p \leq \infty$ entonces vale

$$\|Mf\|_{L^p(\mu)} \leq 2 \left(c_2 \frac{p}{p-1} \right)^{1/p} \|f\|_{L^p(\mu)}. \quad (7)$$

2 Ayudantia:

Demostración hecha en clase de $2 \Rightarrow 3$ del teorema:

En clase habemos demostrado que:

$$\mu \left(\left\{ \tilde{M}f > \alpha \right\} \right) \leq 2 \frac{c_2}{\alpha} \int_{|f| > \alpha/2} |f| d\mu, \quad (8)$$

Entonces valen las formulas

$$\begin{aligned} \int_X |\tilde{M}f|^p d\mu &= p \int_0^\infty \mu \left(\left\{ \tilde{M}f > \alpha \right\} \right) \alpha^{p-1} d\alpha \\ &\stackrel{(8)}{\leq} 2 c_2 p \int_0^\infty \left(\int_{|f| > \alpha/2} |f| d\mu \right) \alpha^{p-2} d\alpha \\ &= 2 c_2 p \int_X \left(\int_0^{2|f|} \alpha^{p-2} d\alpha \right) |f| d\mu = 2^p c_2 \frac{p}{p-1} \int_X |f|^p d\mu. \end{aligned} \quad (9)$$

Otra demostración más instructiva de $2 \Rightarrow 3$ del teorema:

Para comprender mejor que pasa, vamos a hacer una desigualdad similar (con una constante un poco menos precisa), **pero ocupando una tecnica que puede ayudar en otras ocasiones**. Vamos a hacer subdivisiones diadicas que son un “tool” básico en analisis armonico.

Para iniciar, acuerdemonos el Problema 2 de la tarea 6:

$$c \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{|f| > 2^n\}) \leq \int_X |f| d\mu \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{|f| > 2^n\}). \quad (10)$$

Indicamos esto mas economicamente

$$\|f\|_{L^1(\mu)} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{|f| > 2^n\}). \quad (11)$$

En efecto vale (ejercicio!) la formula super-cool siguiente, que nos permite de ver la norma “global” de f en termino de suma diadica de “normas de sobreniveles”.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{|f| > 2^n\}) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_n\|_{L^1(\mu)}, \quad \text{dónde} \quad f_n := f 1_{|f| > 2^n}. \quad (12)$$

Similarmente vale (ejercicio!)

(denotando $X \sim_\alpha Y$ si existen $C, c > 0$ dependientes de α tales que $cX \leq Y \leq CX$)

$$\|f\|_{L^p(\mu)}^p \sim_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{pn} \mu(\{|f| > 2^n\}) \sim_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_n\|_{L^p(\mu)}^p. \quad (13)$$

Necesitamos mostrar

$$\|\tilde{M}f\|_{L^p}^p \lesssim_p \|f\|_{L^p}^p \quad (14)$$

(dónde indicamos $X \lesssim_\alpha Y$ si existe $C > 0$ dependiente de α tal que $X \leq C_\alpha Y$).

Por (13), esto es equivalente a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \mu(\{\tilde{M}f > 2^n\}) \lesssim_p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_X |f_n|^p d\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{|f| > 2^n} |f|^p d\mu. \quad (15)$$

Ahora (8) con $\alpha = 2^n$ nos entrega

$$\mu(\{\tilde{M}f > 2^n\}) \lesssim 2^{-n} \int_{|f| > 2^{n-1}} |f| d\mu.$$

Multiplicando por 2^{np} y sumando, reordenando la suma, y usando el bound $|f| > 2^n \Leftrightarrow |f|^{p-1} > 2^{n(p-1)}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \mu(\{\tilde{M}f > 2^n\}) &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{(p-1)n} \int_{|f| > 2^{n-1}} |f| d\mu \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{(p-1)(n+1)} \int_{|f| > 2^n} |f| d\mu \\ &< 2^{p-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{|f| > 2^n} |f|^p d\mu. \end{aligned}$$

Esto nos da directamente (15) y (14), lo que nos prueba el teorema!