

Función maximal y teoremas de recubrimiento

Espacios con bolas y medidas “doubling”

Definición: Si X es un espacio y para todo $x \in X$ y $r > 0$ está definido un conjunto $B(x, r) \subset X$, decimos que $(X, \{B(x, r) : x \in X, r > 0\})$ es un espacio con bolas con constante $c_1 > 0$ si valen las propiedades

1. Para todo $x \in X$ y todos $0 < r_1 \leq r_2$, vale $B(x, r_1) \subset B(x, r_2)$.
2. Para todos $x, y \in X$ y todo $0 < r$, si $B(x, r) \cap B(y, r) \neq \emptyset$ entonces vale $B(x, r) \subset B(y, c_1 r)$.

Ejemplos:

1. Si (X, d) es un **espacio metrico** y $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ son las bolas cerradas usuales, entonces $(X, \{B(x, r)\})$ es un espacio con bolas con constante $c_1 = 3$.

Demostración: la propiedad 1) de la definición es inmediata, y para la propiedad 2), si $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$ entonces $d(x, z), d(y, z) \leq r$ y todo punto $w \in B(x, r)$ satisface $d(w, x) \leq r$. Entonces, por desigualdad triangular, para todo $w \in B(x, r)$ tenemos

$$d(w, y) \leq d(w, x) + d(x, z) + d(z, y) \leq 3r.$$

Esto prueba que $B(x, r) \subset B(y, 3r)$.

2. Como caso particular del punto precedente, $\mathbb{R}^d$ con sus bolas usuales es un espacio con bolas de constante $c_1 = 3$.
3. Fijemos un numero $0 < e < 1$ y en cada punto de $\mathbb{R}^2$ fijamos una dirección $v(x)$, osea fijemos una función $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, y definamos

Envelopa convexa de la elipse E
 $B(x, a) :=$ la cual tiene semieje mayor paralelo al vector $v(x)$,
y tiene un foco en x y eccentricidad e .

Esto nos entrega un espacio con bolas de constante $c_1 = \frac{e}{e+2}$.

Demostración: Recordamos que si $a < b$ son los largos de semiejes de una elipse, entonces e es dada por $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$, y entonces no cambia por dilatación del elipse. El diámetro del elipse es $2a$, y la distancia de un foco al elipse es ea .

De nuevo, la propiedad 1) de nuestra definición sigue directamente porque $B(x, r_2)$ se obtiene dilatando por r_2/r_1 la elipse $B(x, r_1)$. Para verificar la parte 2), observamos que en el caso que $B(x, a)$ y $B(y, a)$ sean tangentes y $|x - y| = 2ea$, entonces la elipse $B(x, a)$ es también tangente internamente a $B(y, ca)$ para $c = ea/(ea + 2a)$. En el caso de otras posiciones recíprocas un valor de $c < ea/(ea + 2a)$ será suficiente. Esto demuestra que el valor de c_1 optimal que valga para toda v es $c_1 = e/(e + 2)$

Definición: Si X es un espacio con bolas de constante c_1 , $\mathcal{B}$ es una σ -álgebra sobre X que contiene todas las bolas y μ es una medida sobre $(X, \mathcal{B})$, decimos que μ es c_2 -doubling si para toda bola $B(x, r)$ vale

$$\mu(B(x, c_1 r)) \leq c_2 \mu(B(x, r)).$$

Observación: Sería equivalente de imponer que exista $\tilde{c}_2$ tal que par toda bola $\mu(B(x, 2r)) \leq \tilde{c}_2 \mu(B(x, r))$ (osea que “la medida de la bola de radio doble está controlada por la medida de la bola misma”, lo que justifica el nombre “doubling”).

La constante optimal c_2 de la definición que utilizamos y la constante optimal $\tilde{c}_2$ de esta definición alternativa son conectadas por las formulas $\tilde{c}_2^{\lfloor \log_2 c_1 \rfloor} \leq c_2 \leq \tilde{c}_2^{\lceil \log_2 c_1 \rceil}$, con $\lfloor x \rfloor$ el maximo entero menor o igual a x y $\lceil x \rceil$ el minimo entero mayor o igual a x .

Lemma de Vitali

Lemma 1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio con bolas equipado con una medida doubling. Si $\mathcal{F}$ es una familia finita de bolas entonces existe una sub-familia disjunta (osea formada por bolas disjuntas) $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\bigcup_{B(x,r) \in \mathcal{F}} B(x, r) \subset \bigcup_{B(x',r') \in \mathcal{F}'} B(x', c_1 r'). \quad (1)$$

Además vale

$$\mu \left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right) \leq c_2 \sum_{B' \in \mathcal{F}'} \mu(B'). \quad (2)$$

Demostración: Si demostramos (1) entonces (2) sigue directamente del facto que $\mathcal{F}'$ es compuesta de bolas disjuntas μ es c_2 -doubling (y esto justifica nuestra definición de doubling, dónde aparece la constante c_1 en vez de 2).

Pasamos entonces a construir $\mathcal{F}'$ cómo en (1). Esto se hará mediante un “greedy algorithm”, cómo sigue.

Empezamos tomando $\mathcal{F}(0) := \emptyset, \mathcal{R}(0) := \mathcal{F}$.

Paso $n + 1$ (con $n \geq 0$):

Sean $\mathcal{F}(n), \mathcal{R}(n) \subset \mathcal{F}$ las familias de bolas construidas al paso precedente.

Si $\mathcal{R}(n) = \emptyset$ entonces ponemos $\mathcal{F}' := \mathcal{F}(n)$ y el algoritmo termina.

Si $\mathcal{R}(n) \neq \emptyset$, eligimos

$$B_{n+1} = B(x_{n+1}, r_{n+1}) \in \mathcal{R}(n) \quad \text{t. q.} \quad r_{n+1} = \max\{r : \exists x \in X, B(x, r) \in \mathcal{R}(n)\},$$

y definamos

$$\mathcal{F}(n+1) := \mathcal{F}(n) \cup \{B_{n+1}\}, \quad \mathcal{R}(n+1) := \{B \in \mathcal{F} : \forall B' \in \mathcal{F}(n+1), B \cap B' = \emptyset\}.$$

...y pasamos al paso siguiente.

Las siguientes afirmaciones se pueden verificar directamente:

- El algoritmo termina en a lo más $\#\mathcal{F}$ pasos. (En efecto, $\#\mathcal{F}(n) = n$, lo que se puede demostrar por inducción.)
- $\mathcal{F}'$ es formada por bolas disjuntas. (Porqué en cada paso se adjunta a $\mathcal{F}(n)$ una bola que, cómo está en $\mathcal{R}(n)$, no intersecta ninguna bola de $\mathcal{F}(n)$.)
- Al termino del algoritmo, todas las bolas de $\mathcal{F}$ intersectan bolas de $\mathcal{F}'$. (Porqué terminamos al paso n_0 en el cual $\mathcal{R}(n_0) = \mathcal{F}'$.)
- Si $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$ entonces existe n y $B_n = B(x_n, r_n) \in \mathcal{F}'$ tal que $B \subset B(x_n, c_1 r_n)$.

Demostración de la afirmación precedente: Notamos que existe un primer paso $n \geq 1$ tal que $B \cap B_n \neq \emptyset$. Si $B = B(x, r)$ y $B_n = B(x_n, r_n)$, entonces $r_n \geq r$ (porqué si fuera cierta la desigualdad opuesta, entonces la bola B_n no sería estada eligida en el paso n cómo bola de radio más grande que no intersecta las precedentes). Entonces por la propiedad 1 en la definición de un espacio con bolas,

$$\emptyset \neq B(x, r) \cap B(x_n, r_n) \subset B(x, r_n) \cap B(x_n, r_n),$$

y para la propiedad 2 de la definición de un espacio con bolas,

$$B(x, r_n) \subset B(x_n, c_1 r_n).$$

Los puntos precedentes concluyen la demostración del lemma. □

Función maximál

Sea $(X, \{B(x, r)\})$ es un espacio con bolas con constante c_1 y μ una medida doubling con constante c_2 sobre X .

Definición: Sean X, μ cómo arriba, con además $\mu(B(x, r)) < \infty$ para todas bolas $B(x, r)$, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Entonces definimos para $x \in X$:

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| d\mu(y), \quad \tilde{M}f(x) := \sup_{\substack{B \text{ bola,} \\ x \in B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y). \quad (3)$$

La función Mf se llama función maximál de f y $\tilde{M}f$ se llama función maximál decen-trada de f .

Propiedades elementales de $Mf, \tilde{M}f$: (demostraciones dejadas como ejercicio)

- $Mf = M|f| = |Mf|, \tilde{M}f = \tilde{M}|f| = |\tilde{M}f|.$
- Para todo x vale $\tilde{M}f(x) \geq Mf(x).$
- Para todo x , siendo que μ es doubling, $\tilde{M}f(x) \leq c_2 Mf(x).$

Teorema maximál

Recordamos que el espacio $L^{1,\infty}(\mu)$ sobre un espacio de medida es formado por las funciones tales que

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(\mu)} := \sup_{\alpha>0} \alpha \mu(\{|f| > \alpha\}) < \infty. \quad (4)$$

Observación:

1. En un espacio metrico (X, d) , un conjunto $E \subset X$ es compacto cuando por cada recubrimiento de E por bolas $B(x, r)$, existe un subrecubrimiento finito de E . La misma condición se puede formular en todo espacio con bolas.
2. Para el caso de $\mathbb{R}^d$ con la medida de Lebesgue $\mu = m$, hemos visto que si $E \subset \mathbb{R}^d$ medible entonces

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(E') : E' \subset E, E' \text{ compacto} \}. \quad (5)$$

3. Siendo que tenemos una noción de “compacto” para espacios con bolas una condición de regularidad similar sobre μ se puede formular de la misma manera para nuestra μ sobre un espacio con bolas (dónde “compacto” se considera en el sentido del punto precedente).

Para continuar, necesitamos esta hipótesis de regularidad de la medida μ :

Hipotesis adicional sobre μ : La medida μ satisface la aproximabilidad por “compactos” (5), en el sentido de la observación precedente.

Teorema 2. Suponemos que $(X, \{B(x, r)\})$ es un espacio con bolas y que μ es una medida doubling de constante c_2 que satisface la propiedad (5).

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible.

1. Si $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces $Mf(x) < \infty$ para μ -casi todo $x \in X$.
2. Si $f \in L^1(\mu)$ entonces vale

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mu)} \leq c_2 \|f\|_{L^1(\mu)}. \quad (6)$$

3. Si $f \in L^p(\mu)$ con $1 < p \leq \infty$ entonces vale

$$\|Mf\|_{L^p(\mu)} \leq 2 \left(c_2 \frac{p}{p-1} \right)^{1/p} \|f\|_{L^p(\mu)}. \quad (7)$$

Demuestraçión: El punto 1 del enunciado sigue de (6) y (7), entonces será suficiente de demostrar los puntos 2 y 3.

Para el punto 1, observamos que a causa de la propiedad de $\tilde{M}f(x) \leq c_2 Mf(x)$ vista en la sección precedente, para demostrar (6) es suficiente de mostrar

$$\|\tilde{M}f\|_{L^{1,\infty}(\mu)} \leq c_2 \|f\|_{L^1(\mu)}. \quad (8)$$

para esto, mirando la definición (4) se ve que es suficiente de mostrar, para cada $\alpha > 0$,

$$\alpha \mu \left(\{x : \tilde{M}f(x) > \alpha\} \right) \leq \int_X |f| d\mu. \quad (9)$$

Definamos

$$E_\alpha := \{x \in X : \tilde{M}f(x) > \alpha\}. \quad (10)$$

Utilizando (5), es equivalente a (9) que para todo $E \subset E_\alpha$ compacto vale

$$\mu(E) < \frac{1}{\alpha} \int_X |f| d\mu. \quad (11)$$

Ahora, el facto que $x \in E_\alpha$, osea que $\tilde{M}f(x) > \alpha$, significa (utilizando la definición (3)) que existe una bola B_x que contenece x tal que

$$\alpha < \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x} |f| d\mu \Leftrightarrow \mu(B_x) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f| d\mu. \quad (12)$$

Eligiendo una tal bola B_x para todo $x \in E_\alpha$, encontramos un recubrimiento de E_α , y entonces también de cada $E \subset E_\alpha$ compacto, osea vale

$$E \subset E_\alpha \subset \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x. \quad (13)$$

El facto que E es compacto significa que existe una subfamilia finita $\mathcal{F} \subset \{B_x : x \in E_\alpha\}$ que todavía cubre E . Para esta familia aplicamos el lemma de Vitali demostrado en estas notas, y esto nos permite de concluir! Obtenecemos una subfamilia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ disjunta tal que:

$$\begin{aligned} \mu(E) &\stackrel{(\text{Vitali})}{\leq} c_2 \sum_{B'_x \in \mathcal{F}'} \mu(B'_x) \\ &\stackrel{(12)}{\leq} \frac{c_2}{\alpha} \sum_{B'_x \in \mathcal{F}'} \int_{B'_x} |f| d\mu \\ &\stackrel{(\mathcal{F}' \text{ disj.})}{=} \frac{c_2}{\alpha} \int_{\bigcup_{\mathcal{F}'} B'_x} |f| d\mu \\ &\stackrel{(|f| \geq 0)}{\leq} \int_X |f| d\mu. \end{aligned} \quad (14)$$

Esto muestra (11) para todo $E \subset E_\alpha$ compacto, como quereamos.

Ahora **demostramos el punto 3** del enunciado. Vamos a ocupar el punto precedente, y para esto necesitamos reducir la complejidad del problema a una discusión de sobreniveles. Vamos a ocupar la cota siguiente

$$\mu \left(\left\{ \tilde{M}f > \alpha \right\} \right) \leq 2 \frac{c_2}{\alpha} \int_{|f| > \alpha/2} |f| d\mu. \quad (15)$$

Antes de mostrar (15), vamos a ver como nos permite de obtener (7). Esto sigue de las formulas

$$\int_X |g|^p d\mu = p \int_0^\infty \mu(\{|g| > \alpha\}) \alpha^{p-1} d\alpha \quad (16)$$

que ya habemos visto en clases precedentes y nos puede ayudar para $g = \tilde{M}f$, y nos entrega

$$\begin{aligned}
\int_X |\tilde{M}f|^p d\mu &\stackrel{(16)}{=} p \int_0^\infty \mu \left(\left\{ \tilde{M}f > \alpha \right\} \right) \alpha^{p-1} d\alpha \\
&\stackrel{(15)}{\leq} 2 c_2 p \int_0^\infty \left(\int_{|f|>\alpha/2} |f| d\mu \right) \alpha^{p-2} d\alpha \\
&= 2 c_2 p \int_X \left(\int_0^{2|f|} \alpha^{p-2} d\alpha \right) |f| d\mu = 2^p c_2 \frac{p}{p-1} \int_X |f|^p d\mu, \quad (17)
\end{aligned}$$

lo que es equivalente a (7). Para justificar el cambio de orden de integración en (17), se puede usar el teorema de Fubini (que vamos a considerar en unas clases más) o se puede discretizar f directamente, cómo en el problema 4 de la tarea 6.

Lo que falta para concluir la demostración es demostrar (15). Esto sigue de las dos partes siguientes:

$$\left\{ \tilde{M}f > \alpha \right\} \subset \left\{ \tilde{M} (f 1_{|f|>\alpha/2}) > \frac{\alpha}{2} \right\}, \quad (18a)$$

$$\mu \left(\left\{ \tilde{M} (f 1_{|f|>\alpha/2}) > \frac{\alpha}{2} \right\} \right) \leq \frac{c_2}{\alpha} \int_X |f| 1_{|f|>\alpha/2} d\mu = \int_{|f|>\alpha/2} |f| d\mu. \quad (18b)$$

La parte (18b) sigue aplicando el punto 2 a la función $f 1_{|f|>\alpha/2}$, entonces falta la parte (18a), para la cuál ocupamos el “truco” siguiente. Tenemos que $x \in \{\tilde{M}f > \alpha\}$ si y solo si existe B_x bola con $x \in B_x$ y con $\alpha > \mu(B_x)^{-1} \int_{B_x} |f| d\mu$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu(B_x) &< \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f| d\mu = \frac{1}{\alpha} \int_{\{|f|>\alpha/2\} \cap B_x} |f| d\mu + \frac{1}{\alpha} \int_{\{|f|<\alpha/2\} \cap B_x} |f| d\mu \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f 1_{|f|>\alpha/2}| d\mu + \frac{1}{2} \mu(B_x).
\end{aligned}$$

reordinando los terminos obtenecemos el primer termino abajo, y las formulaciones equivalentes siguen reordenando terminos y por definición de $\tilde{M}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mu(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f 1_{|f|>\alpha/2}| d\mu &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x} |f 1_{|f|>\alpha/2}| d\mu \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{ \tilde{M} (f 1_{|f|>\alpha/2}) > \frac{\alpha}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Esto vale para todo $x \in \{\tilde{M}f > \alpha\}$, lo que concluye la prueba de (18a), y del punto 3 del teorema también. □