

Función de distribución, funciones L^p y $L^{p,\infty}$

Espacios L^p

Consideramos un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Para $0 < p < \infty$ el espacio $L^p(\mu)$ se define cómo el espacio de las funciones medibles $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Para $p = \infty$ se define

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} := \sup\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C, \text{ para } \mu\text{-c.t. } x \in X\}.$$

y el espacio $L^\infty(\mu)$ está formado por todas las funciones f medibles tales que $\|f\|_{L^\infty(\mu)} < \infty$.

Observación: *Cómo ya hicimos para el caso $L^1(\mu)$, funciones $f, g \in L^p(\mu)$ se consideran equivalentes $f \sim g$ si coinciden c.t.p. respecto a μ . Por abuso de notación indicamos el cociente $L^p(\mu)/\sim$ siempre con “ $L^p(\mu)$ ”, confundiendo cada función con su clase de equivalencia.*

La condición $\|f\|_{L^p(\mu)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ c.t.p. sigue cómo en el caso $p = 1$ ya considerado en clase. La condición de 1-homogeneidad $\|cf\|_{L^p(\mu)} = |c|\|f\|_{L^p(\mu)}$ para $c \in \mathbb{C}$ sigue fácilmente de la homogeneidad de la integral.

Pasamos ahora a demostrar que $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ es una norma para $1 \leq p \leq \infty$ y una seminorma para $0 < p < 1$. Esto significa que para todo $0 < p \leq \infty$ existe C_p tal que para todas f, g medibles

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)} \leq C_p (\|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}), \quad \text{con } C_p = 1 \text{ para } 1 \leq p \leq \infty. \quad (1)$$

Demostración de (1): Para $p = \infty$ esto es directo, y vamos a dejar el caso $0 < p < 1$ para ejercicio, y nos concentramos en el caso $1 \leq p < \infty$.

Por 1-homogeneidad, a menos de multiplicar f, g por una constante, podemos suponer que $\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} = 1$. En el caso $f = 0$ o $g = 0$ c.t.p., la prueba es trivial, entonces nos concentramos en los casos restantes. Por homogeneidad existe $0 < \theta < 1$ tal que $f = \theta F, g = (1 - \theta)G$, con $\|F\|_{L^p} = \|G\|_{L^p} = 1$. Por convexidad de la función $x \mapsto |x|^p$ sigue que para todo $x \in X$

$$|\theta F(x) + (1 - \theta)G(x)|^p \leq \theta |F(x)|^p + (1 - \theta) |G(x)|^p.$$

Integrando esta desigualdad respecto a μ obtenemos (1) para F, G , lo que concluye nuestra prueba. $\square$

Conclusión: *Para $1 \leq p \leq \infty$, el conjunto $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial, y $\|\cdot\|_{L^p(\mu)} : L^p(\mu) \rightarrow [0, +\infty)$ define una norma.*

Vamos a demostrar ahora que $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ es un *espacio de Banach*, osea un espacio normado *completo*. Un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ se llama completo si toda sucesión de Cauchy en V respecto a la norma $\|\cdot\|$ tiene un límite en V .

Lemma 1. Sea $(V, |\cdot|)$ un espacio normado. V es completo si y solo si por una sucesión $v_n \in V$ vale la implicación

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \exists v \in V, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^N v_n - v \right| = 0. \quad (2)$$

Demuestraçión: Si vale (2), entonces cuando w_n es una sucesión de Cauchy en V , podemos encontrar una sub-sucesión w_{n_k} tal que $v_k := w_{n_{k+1}} - w_{n_k}$ satisface la parte izquierda de (2), y entonces tal que w_{n_k} converge a un límite $w \in V$. Cómo w_n es Cauchy, $|w_m - w_{n_k}|$ tende a cero cuando $m, k \rightarrow \infty$ y entonces w_n también converge al mismo límite w . Entonces (2) es equivalente a que $(V, |\cdot|)$ sea completo.

Viceversa, suponamos que $(V, |\cdot|)$ sea completo, y sea v_n una sucesión que verifica la parte izquierda de (2). Entonces $\sum_{n=1}^N v_n$ es una sucesión de Cauchy, y tiene un límite en V por hipótesis. Entonces vale la parte derecha de (2), como se quería demostrar. $\square$
El lemma nos permite demostrar lo siguiente:

Proposición 2. Sea $0 < p \leq \infty$. Entonces el espacio $L^p(\mu)$ con la norma (o seminorma, si $0 < p < 1$) $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ es completo.

Vamos a dejar los casos $0 < p < 1$ y $p = \infty$ por ejercicio, sabiendo que las ideas necesarias están similares a las requeridas para $1 \leq p < \infty$. **Demuestraçión para $1 \leq p < \infty$:** Sea $f_n \in L^p(\mu)$ una sucesión tal que valga la parte izquierda de (2) con $(V, |\cdot|) = (L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$, y verificamos que vale la parte derecha. Para la desigualdad triangular (1), vale

$$\left\| \sum_{n=1}^N |f_n| \right\|_{L^p(\mu)} \leq \sum_{n=1}^N \|f_n\|_{L^p(\mu)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p(\mu)} =: M < \infty.$$

Pasando al límite $N \rightarrow \infty$ por convergencia monotónica encontramos

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_{L^p(\mu)} \leq M,$$

y entonces la suma $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ está finita por μ -c.t. $x \in X$. También tenemos en este caso (y entonces μ -c.t.p.),

$$\left(\sum_{n=1}^N f_n(x) \right)^p \rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)^p$$

y por convergencia dominada sigue que $\sum_{n=1}^N f_n(x)$ converge en L^p , verificando el lado derecho de (2), como se quería demostrar. $\square$

Mencionamos un otro resultado útil en el estudio de sucesiones en L^p :

Proposición 3. Sea $1 \leq p < \infty$ y sean $f_n, f \in L^p(\mu)$. Condición suficiente para que f_n converga a f en $L^p(\mu)$ es que $f_n \rightarrow f$ c.t.p. y que $\|f_n\|_{L^p(\mu)} \rightarrow \|f\|_{L^p(\mu)}$.

Demuestraçión:

Enunciado 1: Si f_n, f son medibles, $f_n \rightarrow f$ c.t.p. y existen $g_n : X \rightarrow [0, +\infty]$, $g_n \in L^1(\mu)$ tales que $|f_n| \leq g_n$ c.t.p. y $\|g_n\|_{L^1(\mu)} \rightarrow \|g\|_{L^1(\mu)}$ entonces $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$.

Demostración del enunciado 1: Se procede cómo para la prueba de la convergencia dominada, aplicando Fatou y nuestras hipótesis de convergencia:

$$\begin{aligned}\int g + \int f &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int g + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n, \\ \int g - \int f &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int g - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n,\end{aligned}$$

lo que implica el enunciado 1.

Para concluir la prueba, es suficiente usar el enunciado 1 con f_n, f, g_n, g remplazados por $\tilde{f}_n := |f_n - f|^p, \tilde{f} := 0, \tilde{g}_n := 2^p(|f_n|^p + |f|^p), \tilde{g} := 2^{p+1}|f|^p$, respectivamente. Las hipótesis de la proposición implican que las hipótesis de convergencia del enunciado 1 están verificadas con esta elección. La prueba de la dominación $|\tilde{f}_n| \leq \tilde{g}_n$, osea $|f_n - f|^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$, sigue de la cadena de desigualdades siguientes, que valen para todos $a, b \in \mathbb{C}$:

$$|a - b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

□

Función de distribución

La *función de distribución* de una $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible es la función

$$F_f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty], \quad F_f(\lambda) := \mu(\{|f| > \lambda\}). \quad (3)$$

Se verifica directamente que valen las siguientes propiedades básicas (para todas funciones medibles $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$):

1. Si $|f| \leq |g|$ c.t.p. entonces $F_f \leq F_g$.
2. Para todo $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $F_{cf}(\lambda) = F_f(\lambda/|c|)$.
3. $F_{f+g}(a+b) \leq F_f(a) + F_g(b)$ y $F_{fg}(ab) \leq F_f(a) + F_g(b)$.
4. Si $T : X \rightarrow X$ es una transformación que preserva la medida, osea si $T_{\#}\mu = \mu$, entonces $F_f = F_{f \circ T}$.

Se verifica también fácilmente que

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} F_f(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

Demostración de (4):

$$\begin{aligned}p \int_0^\infty \lambda^{p-1} F_f(\lambda) d\lambda &:= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{|f| > \lambda\}) d\lambda = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \int_X 1_{\{|f| > \lambda\}}(x) d\mu(x) d\lambda \\ &= \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} p \lambda^{p-1} d\lambda \right) d\mu(x) = \int_X |f(x)|^p d\mu(x),\end{aligned}$$

dónde la igualdad en la segunda línea se puede justificar ocupando el teorema de Fubini, o directamente, aproximando el integral ocupando discretizaciones sucesivas de los conjuntos de nivel de f . □

Espacios $L^{p,\infty}$

Usando la función de distribución se puede definir un analogo menos fuerte de la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$, osea

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} := \inf \left\{ C \geq 0 : \forall \lambda > 0, \quad F_f(\lambda) \leq \frac{C^p}{\lambda^p} \right\} = \sup_{\lambda > 0} \lambda (\mu(\{|f| > \lambda\}))^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

Se define el espacio $L^{p,\infty}(\mu)$ como el espacio de todas las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medibles tales que $\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} < \infty$. Este espacio se llama también el *espacio L^p -debil*.

Ocupando las propiedades de la función de distribución se puede verificar que existe $c_p > 0$ tal que para todas $f, g \in L^{p,\infty}(\mu)$ vale

$$\|f + g\|_{L^{p,\infty}(\mu)} \leq c_p (\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} + \|g\|_{L^{p,\infty}(\mu)}). \quad (6)$$

En general vale $c_p > 1$. En el caso $p = 1$ podemos también verificar algo más fuerte, osea que el espacio vectorial $L^{1,\infty}(\mu)$ *no es normable*, osea no existe una norma $\|\cdot\|_*$ sobre $L^{1,\infty}(\mu)$ y constantes $0 < c_* \leq C_* < \infty$ tales que para todo $f \in L^{1,\infty}(\mu)$ sean ciertas las desigualdades (que dicen que $\|\cdot\|_*$ es equivalente a la casinorma $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}(\mu)}$).

$$c_* \|f\|_* \leq \|f\|_{L^{1,\infty}(\mu)} \leq C_* \|f\|_*. \quad (7)$$

Para ver esta propiedad, notamos que una norma $\|\cdot\|_*$ por definición verifica la desigualdad triangular, mientras que los errores en la desigualdad triangular introducidos por $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}(\mu)}$ pueden acumularse de manera divergente. Más explícitamente, sea S_N el grupo de las permutaciones de $\{1, \dots, N\}$ y para $\sigma \in S_N$ se defina

$$f_\sigma := \sum_{j=1}^N \frac{N}{\sigma(j)} 1_{[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N})}.$$

Se verifica que para todo $\sigma \in S_N$ vale $\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}(\mu)} = \|f_{id}\|_{L^{1,\infty}(\mu)} = 1$, y

$$\sum_{\sigma \in S_N} f_\sigma = N! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right) 1_{[0,1)}, \text{ y entonces } \left\| \sum_{\sigma \in S_N} f_\sigma \right\|_{L^{1,\infty}(\mu)} = N! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right).$$

Demostración que $L^{1,\infty}([0,1])$ no es normable: Suponamos que exista una norma $\|\cdot\|_*$ tal que valga (7) para todo $f \in L^{1,\infty}([0,1])$, con $0 < c_* \leq C_* < \infty$. A menos de multiplicar $\|\cdot\|_*$ por un factor constante podemos suponer que $C_* = 1$. En este caso nuestro ejemplo, más la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_*$, nos entrega

$$N! = \sum_{\sigma \in S_N} \|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}} \geq \sum_{\sigma \in S_N} \|f_\sigma\|_* \geq \left\| \sum_{\sigma \in S_N} f_\sigma \right\|_* \geq c_* \left\| \sum_{\sigma \in S_N} f_\sigma \right\|_{L^{1,\infty}} = c_* N! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right).$$

Esto implica que para todo N vale

$$\frac{1}{c_*} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N},$$

lo que no puede ser verificado para $c_* > 0$. Entonces no existe una norma $\|\cdot\|_*$ comparable con la casinorma $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$, cómo queríamos demostrar. $\square$

La relación entre L^p y $L^{p,\infty}$ es la siguiente:

Proposición 4. Para toda $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible vale

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \geq \|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)}.$$

En particular, $L^p \subset L^{p,\infty}$.

Demuestraón: Para la monotonía del integral vale

$$\int_X |f|^p d\mu \geq \int_{|f|>\lambda} |f|^p d\mu \geq \lambda^p \mu(\{|f| > \lambda\}).$$

Tomando el sup respecto a $\lambda > 0$ en el miembro derecho, sigue la tesi de la proposición. $\square$