

Resultados sobre funciones uniformemente integrables

Proposición 1. Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son dos familias de funciones medibles tales que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M} |f| d\mu = 0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{g \in \mathcal{G}} \int_{|g| > M} |g| d\mu = 0,$$

entonces la familia

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} := \{f + g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$$

satisface también

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{f+g \in \mathcal{F}+\mathcal{G}} \int_{|f+g| > M} |f+g| d\mu = 0.$$

Demostración: La tesi sigue de la siguiente desigualdad:

$$\int_{|f+g| < 2M} |f+g| d\mu \leq \int_{|f| > M} 2|f| d\mu + \int_{|g| > M} |g| d\mu,$$

la cual sigue de la desigualdad puntual

$$|f+g|1_{|f+g| > 2M} \leq 2|f|1_{|f| > M} + 2|g|1_{|g| > M}. \quad (1)$$

Para demostrar (1) notamos que X es la unión de los dos conjuntos $\{|f| \leq |g|\}, \{|f| \leq |g|\}$, y (1) sigue si demostramos

$$\begin{aligned} |f+g|1_{|f+g| > 2M} 1_{|f| \leq |g|} &\leq 2|f|1_{|f| > M} 1_{|f| \leq |g|} + 2|g|1_{|g| > M} 1_{|f| \leq |g|}, \\ |f+g|1_{|f+g| > 2M} 1_{|f| \geq |g|} &\leq 2|f|1_{|f| > M} 1_{|f| \geq |g|} + 2|g|1_{|g| > M} 1_{|f| \geq |g|}. \end{aligned}$$

Nos concentramos en la segunda desigualdad, y la primera se demuestra de manera analoga. A menos de remplazar f por $f1_{|f| \geq |g|}$ y g por $g1_{|f| \geq |g|}$ podemos suponer que $|f| \geq |g|$ en todo X y demostrar (1) bajo esta condición. En este caso

$$\{|f+g| > 2M\} \subset \{|f| > M\}, \quad |f+g| \leq |f| + |g| \leq 2|f|,$$

y entonces

$$|f+g|1_{|f+g| > 2M} \leq 2|f|1_{|f+g| > 2M} \leq 2|f|1_{|f| > M},$$

y (1) sigue directamente. □

Proposición 2. Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida y $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset L^1(\mu)$ satisfacen

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| < \delta} |f| d\mu = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{g \in \mathcal{G}} \int_{|g| < \delta} |g| d\mu = 0$$

y

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^1(\mu)} < \infty, \quad \sup_{g \in \mathcal{G}} \|g\|_{L^1(\mu)} < \infty,$$

entonces $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ satisface también

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f+g \in \mathcal{F}+\mathcal{G}} \int_{|f+g| < \delta} |f+g| d\mu = 0 \quad \sup_{f+g \in \mathcal{F}+\mathcal{G}} \|f+g\|_{L^1(\mu)} < \infty.$$

Demostración: Si $\|f\|_{L^1(\mu)} \leq A_{\mathcal{F}}$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y $\|g\|_{L^1(\mu)} < A_{\mathcal{G}}$ para toda $g \in \mathcal{G}$ entonces $\|f + g\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^1(\mu)} + \|g\|_{L^1(\mu)} \leq A_{\mathcal{F}} + A_{\mathcal{G}}$ para toda $f + g \in \mathcal{F} + \mathcal{G}$, lo que demuestra la segunda propiedad requerida.

Para demostrar la segunda propiedad, fijemos $\epsilon > 0$, y observamos que por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que para todas $f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}$ vale

$$\int_{|f| < \delta} |f| d\mu < \epsilon, \quad \int_{|g| < \delta} |g| d\mu < \epsilon. \quad (2)$$

Será suficiente encontrar $\kappa > 0$ dependiente solamente de $A_{\mathcal{F}}, \epsilon$ y δ y tal que

$$\int_{|f+g| < \kappa} |f + g| d\mu < 5\epsilon. \quad (3)$$

Para esto, imponamos que $\kappa < \delta/2$ y dividamos el integral (3) en tres pedazos que trataremos separadamente:

$$\int_{|f+g| < \kappa} |f + g| d\mu = \int_{|f+g| < \kappa, |f| > \delta/2} |f + g| d\mu + \int_{|f+g| < \kappa, |f| < \delta/2} |f| d\mu + \int_{|f+g| < \kappa, |f| > \delta/2} |g| d\mu. \quad (4)$$

Para el primer pedazo utilizamos la desigualdad de Markov y encontramos

$$\int_{|f+g| < \kappa, |f| > \delta/2} |f + g| d\mu \leq \kappa \mu(\{|f| > \delta/2\}) \stackrel{\text{Markov}}{\leq} \kappa \frac{1}{\delta/2} \int_X |f| d\mu \leq \kappa \frac{2A_{\mathcal{F}}}{\delta}, \quad (5)$$

lo que está acotado por ϵ si eligimos $\kappa < \epsilon\delta/(2A_{\mathcal{F}})$.

Para el segundo pedazo en (4) utilizamos (2) y la inclusión $\{|f + g| < \kappa, |f| < \delta/2\} \subset \{|f| < \delta/2\} \subset \{|f| < \delta\}$, entonces

$$\int_{|f+g| < \kappa, |f| < \delta/2} |f| d\mu \leq \int_{|f| < \delta} |f| d\mu < \epsilon. \quad (6)$$

Para el tercer pedazo en (4) utilizamos la desigualdad triangular que dice

$$|f + g| < \kappa, |f| < \delta/2 \quad \Rightarrow \quad |g| < \kappa + \delta/2 < \delta$$

usando nuestra hipótesis $\kappa < \delta/2$. Esto implica que $\{|f + g| < \kappa, |f| < \delta/2\} \subset \{|g| < \delta\}$ y nos permite de usar (2) para obtener

$$\int_{|f+g| < \kappa, |f| > \delta/2} |g| d\mu \leq \int_{|g| < \delta} |g| d\mu < \epsilon. \quad (7)$$

Sumando (5), (6) y (7) y con la elección de $\kappa < \min\{\delta/2, \epsilon\delta/(2A_{\mathcal{F}})\}$, obtenemos en (4) la cota (3). $\square$

Consecuencia inmediata de las dos proposiciones precedentes es el teorema siguiente:

Teorema 3. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son dos familias de funciones uniformemente integrables, entonces $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ es uniformemente integrable.

El teorema precedente nos permite de simplificar la demostración del teorema 1.5.13 de Tao:

Teorema 4. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Si $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones uniformemente integrables y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible, entonces

$$f_n \rightarrow f \text{ en } L^1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad f_n \rightarrow f \text{ en medida.}$$

Demuestraçión: Recordamos que la convergencia en $L^1(\mu)$ implica la convergencia en medida en general, entonces la parte interesante del teorema es la implicación opuesta, en la cual entonces nos concentramos.

Cómo habemos visto en el curso, la convergencia en medida $f_n \rightarrow f$ implica la convergencia casi uniforme (y entonces c.t.p.) para una sub-sucesión f_{n_k} . Por el teorema de Fatou sigue que $f \in L^1(\mu)$.

El facto que $f \in L^1(\mu)$ implica que la sucesión constante $g_n = -f, n \in \mathbb{N}$ es uniformemente integrable.

El teorema precedente implica que la sub-familia $\{f_n - f\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable, y esto es equivalente a decir que $\{|f_n - f|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable. La sucesión $|f_n - f|$ converge a cero en medida, y necesitamos demostrar que convege a cero en $L^1(\mu)$. Entonces, a menos de remplazar f_n, f por $|f_n - f|, 0$ respectivamente, podemos considerar solo el caso en qué $f_n : X \rightarrow [0, +\infty)$ y $f = 0$.

Fijemos $\epsilon > 0$ y demostramos que existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ vale

$$\int_X f_n < \epsilon.$$

Ya sabemos por uniforme integrabilidad de f_n que existen $\delta > 0, M > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\int_{f_n < \delta} f_n d\mu < \frac{\epsilon}{3}, \quad \int_{f_n > M} f_n d\mu < \frac{\epsilon}{3}.$$

El facto que $f_n \rightarrow 0$ en medida implica que existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ vale

$$\mu(\{f_n \geq \delta\}) < \frac{\epsilon}{3M},$$

y entonces

$$\int_{f_n \geq \delta} f_n d\mu = \int_{f_n > M} f_n d\mu + \int_{\delta \leq f_n < M} f_n d\mu < \frac{\epsilon}{3} + M\mu(\{f_n \geq \delta\}) < \frac{2}{3}\epsilon.$$

Entonces para $n \geq n_0$ vale

$$\int_X f_n d\mu = \int_{f_n < \delta} f_n d\mu + \int_{f_n \geq \delta} f_n d\mu \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{2}{3}\epsilon = \epsilon,$$

cómo se necesitaba demostrar. □