

Teorema de *De La Vallée-Poussin*

Trabajamos en un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Recordamos que una familia de funciones $\mathcal{F} \subset L^1(\mu)$ se define *uniformemente integrable* si

1. $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^1(\mu)} < \infty$,
2. $\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M} |f| d\mu = 0$,
3. $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| \leq \delta} |f| d\mu = 0$.

Observación: En unos textos, que trabajan especialmente bajo la condición $\mu(X) < \infty$, la definición de “uniformemente integrable” incluye solo la segunda condición de nuestra definición.

En efecto, bajo la condición $\mu(X) < \infty$, ser uniformemente integrable equivale a imponer la sola condición 2. de nuestra definición:

1. La condición 3. de nuestra definición sigue de $\mu(X) < \infty$, siendo que en este caso para toda f medible podemos usar la cota

$$\int_{|f| \leq \delta} |f| d\mu \leq \delta \mu(X) \rightarrow 0, \quad (\delta \rightarrow 0).$$

2. La condición $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^1(\mu)} < \infty$ sigue de $\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M} |f| d\mu < \infty$ bajo la condición $\mu(X) < \infty$, porque para toda $f \in \mathcal{F}$

$$\int_X |f| d\mu = \int_{|f| \leq M} |f| d\mu + \int_{|f| > M} |f| d\mu \leq M \mu(X) + \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M} |f| d\mu, \quad (1)$$

y si $\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M} |f| d\mu < \infty$ entonces existe M_0 tal que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M_0} |f| d\mu = C(M_0) < \infty$. Tomando el $\sup_{f \in \mathcal{F}}$ en (1) sigue entonces

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^1(\mu)} \leq M_0 \mu(X) + C(M_0) < \infty.$$

Teorema 1 (De La Vallée - Poussin). Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, con $\mu(X) < \infty$. Sea $\mathcal{F} \subset L^1$.

$\mathcal{F}$ es uniformemente integrable

$\Leftrightarrow$

$$\text{Existe } G : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ creciente t.q.} \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty, \\ \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_X G(|f(x)|) d\mu(x) < \infty. \end{cases}$$

Demuestraón:

Ya habemos visto que cuando $\mu(X) < \infty$ la condición que $\mathcal{F}$ sea uniformemente integrable es equivalente a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M} |f| d\mu = 0.$$

Demuestraóni de “ $\Leftarrow$ ”: Fijamos $\epsilon > 0$ y necesitamos encontrar M tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ vale

$$\int_{|f| > M} |f| d\mu < \epsilon. \quad (2)$$

Sabemos que $G(t)/t \rightarrow \infty$, lo que significa

$$\forall C, \exists M, C < \frac{G(t)}{t} \quad \text{para } t > M. \quad (3)$$

Usando esto con $t = |f(x)| > M$ y integrando en $d\mu(x)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ vale

$$\int_{|f| > M} |f| d\mu \leq \frac{1}{C} \int_{\{x: |f(x)| > M\}} G(|f(x)|) d\mu(x) \leq \frac{1}{C} \int_X G(|f(x)|) d\mu(x). \quad (4)$$

La segunda propiedad de G dice que $\tilde{C} := \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_X G(|f(x)|) d\mu(x)$ es una constante finita. Entonces tomando el $\sup_{f \in \mathcal{F}}$ en (4) sigue

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| > M} |f| d\mu \leq \frac{\tilde{C}}{C}. \quad (5)$$

Entonces está suficiente de tomar $C = \tilde{C}/\epsilon$ en (3), y con el M garantizado por (3) correspondiente a este C , la cota (5) nos da (2), completando esta primera parte de la prueba.

Demuestraón de “ $\Rightarrow$ ”: Vamos a construir G estrictamente creciente tal que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \int_X G(|f(x)|) d\mu(x) \leq 1. \quad (6)$$

Para empezar, para $f \in \mathcal{F}$ escribimos

$$\begin{aligned} \int_{|f| > M_k} |f| d\mu &= \sum_{j=M_k}^{\infty} \int_{j < |f| \leq j+1} |f| d\mu \\ &\geq \sum_{j=M_k}^{\infty} j \mu(\{j < |f| \leq j+1\}), \end{aligned} \quad (7)$$

donde la primera igualdad sigue porqué los conjuntos $\{j < |f| \leq j+1\}$ con $j \in \mathbb{N}, j \geq M_k$ forman una partición del conjunto $\{|f| > M_k\}$, y la desigualdad en (7) sigue porqué en el conjunto $\{j < |f| \leq j+1\}$ la función f está acotada abajo por j , para cada j .

En (7) podemos reescribir

$$\sum_{j=M_k}^{\infty} j \mu(\{j < |f| \leq j+1\}) = \sum_{j=M_k}^{\infty} \sum_{i=1}^j \mu(\{j < |f| \leq j+1\}) \quad (8)$$

$$\geq \sum_{j=M_k}^{\infty} \sum_{i=M_k}^j \mu(\{j < |f| \leq j+1\}) \quad (9)$$

$$= \sum_{i=M_k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \mu(\{j < |f| \leq j+1\}) \quad (10)$$

$$= \sum_{i=M_k}^{\infty} \mu(\{|f| > i\}), \quad (11)$$

donde para justificar (8) notamos que $\sum_{i=1}^j 1 = j$, para (9) obtenemos una desigualdad porque borramos los terminos con $i \leq M_k$ que son positivos, y para (10) usamos un reordenamiento de la sumación.

En (7) por la hipótesis que $\mathcal{F}$ es una familia uniformemente integrable, podemos encontrar M_k tales que por toda $f \in \mathcal{F}$

$$2^{-k} \geq \int_{|f| > M_k} |f| d\mu \stackrel{(7),(11)}{\geq} \sum_{i=M_k}^{\infty} \mu(\{|f| > i\}), \quad (12)$$

y summando (12) sobre k obtenemos que por toda $f \in \mathcal{F}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=M_k}^{\infty} \mu(\{|f| > i\}) \leq 1. \quad (13)$$

Similmente a (7) escribimos

$$\begin{aligned} \int_X G \circ |f| d\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k < |f| \leq k+1} G \circ |f| d\mu \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} G(k+1) \mu(\{k < |f| \leq k+1\}), \end{aligned} \quad (14)$$

donde se usó la cota superior para $G \circ |f|$ por $G(k+1)$ válida en cada conjunto $\{k < |f| \leq k+1\}$ a causa de la crecencia de G . Ahora suponemos que G sea de la forma

$$G(k+1) = \sum_{j=0}^k g(j), \quad (15)$$

y entonces (14) se escribe, con una reescritura de la doble suma simile a (8)-(11),

$$\int_X G \circ |f| d\mu \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k g(j) \mu(\{k < |f| \leq k+1\}) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j) \mu(\{|f| > j\}). \quad (16)$$

Si ahora ponemos

$$g(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < M_1, \\ \max\{k \in \mathbb{N} : M_k \leq j\} & \text{si } j \geq M_1, \end{cases} \quad (17)$$

entonces obtenemos, con un nuevo intercambio de sumas (ejercicio!),

$$\sum_{j=1}^{\infty} g(j) \mu(\{|f| > j\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=M_k}^{\infty} \mu(\{|f| > j\}). \quad (18)$$

Ahora (13), (16) y (18) implican la formula que necesitamos demostrar, (6).

Observamos que g definida en (17) es creciente y tende a $+\infty$ cuando $j \rightarrow \infty$. Podemos extender g a una función constante en todos los intervalos de la forma $[j, j+1)$ con $j \in \mathbb{N}$, y definir

$$G(t) := \int_0^t g(s) ds,$$

obteniendo en este caso que vale (15) como necesitamos. En este caso G es positiva creciente y $G(t)/t \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \infty$. Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Observación: Además la G construida en la segunda parte de la prueba es estrictamente convexa, lo que es una propiedad extra respecto a lo que requería el teorema.